Plaquette 1 – Décomposition en éléments simples et applications

Fractions rationnelles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On dégage la **partie entière** par division euclidienne, on calcule les coefficients des pôles simples par **multiplication-évaluation**, on traite les pôles multiples par développement, puis on applique la décomposition au calcul d'intégrales et de sommes télescopiques.

Exercice 1 – Partie entière

Déterminer la partie entière de $F = \dfrac{X^3 + 2X}{X^2 - 1}$.

Exercice 2 – Pôles simples

Décomposer $F = \dfrac{1}{(X-1)(X-2)}$ en éléments simples.

Exercice 3 – Trois pôles simples

Décomposer $F = \dfrac{X}{(X-1)(X-2)(X-3)}$.

Exercice 4 – Pôle double

Décomposer $F = \dfrac{X+1}{X(X-1)^2}$.

Exercice 5 – Élément de seconde espèce

Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$: $F = \dfrac{1}{X(X^2+1)}$.

Exercice 6 – Formule P(a)/Q'(a)

Décomposer $F = \dfrac{1}{X^3 - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$ à l'aide de la formule $\lambda = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$.

Exercice 7 – Application à une primitive

Calculer $\displaystyle\int_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 3x + 2}$.

Exercice 8 – Primitive avec arctangente

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 5}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Somme télescopique

Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$ puis sa limite.

Exercice 10 – Télescopage à trois termes

Calculer $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 11 – Décomposition avec paramètre

Décomposer $F = \dfrac{X^2}{(X-1)(X+1)}$ en éléments simples.

Exercice 12 – Pôle triple par développement limité

Décomposer $F = \dfrac{1}{X^3(X+1)}$ en éléments simples.

Exercice 13 – Décomposition de 1/(X⁴ − 1) sur R

Décomposer $F = \dfrac{1}{X^4-1}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 14 – Intégrale avec un pôle double

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 15 – Synthèse : décomposition et primitive

Soit $F(x) = \dfrac{2x+1}{x(x^2+1)}$.

a) Décomposer F en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire une primitive de F sur $]0\,;+\infty[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).