Plaquette 3 – Décomposition dans R(X) : éléments de seconde espèce

Fractions rationnelles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Dans $\mathbb{R}(X)$, les facteurs irréductibles du dénominateur sont les $X-a$ et les trinômes X^2+pX+q sans racine réelle ; à ces derniers correspondent des éléments de **seconde espèce** $\dfrac{\alpha X+\beta}{(X^2+pX+q)^k}$. Trois méthodes, du plus rapide au plus sûr : exploiter une **structure** (fraction en X^2, parité, différence de deux trinômes égale à un monôme), **regrouper** deux à deux les éléments conjugués de la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$, ou **identifier** les coefficients après réduction au même dénominateur. On contrôle toujours en un ou deux points.

Exercice 1 – Décomposer 1/(X³ + 1)

a) Factoriser X^3+1 dans $\mathbb{R}[X]$.

b) Calculer le coefficient du pôle réel.

c) En retranchant l'élément trouvé, obtenir l'élément de seconde espèce, et écrire la décomposition de $F=\dfrac{1}{X^3+1}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

d) Contrôler en $X=0$ et en $X=1$.

Exercice 2 – Décomposer 1/(X⁴ + 1) et X²/(X⁴ + 1)

On note $A=X^2-\sqrt{2}X+1$ et $B=X^2+\sqrt{2}X+1$, de sorte que $X^4+1=AB$.

a) Montrer que si F est une fraction **paire** de dénominateur AB et sans partie entière, sa décomposition est de la forme $\dfrac{aX+b}{A}+\dfrac{-aX+b}{B}$.

b) Décomposer $\dfrac{1}{X^4+1}$.

c) Décomposer $\dfrac{X^2}{X^4+1}$.

d) Contrôler b) et c) en $X=1$.

Exercice 3 – Une fraction en X²

a) Décomposer $G(Y)=\dfrac{1}{(Y+1)(Y+4)}$ dans $\mathbb{R}(Y)$.

b) En déduire la décomposition de $F=\dfrac{1}{(X^2+1)(X^2+4)}$ dans $\mathbb{R}(X)$. Pourquoi est-ce légitime ?

c) Décomposer de même $\dfrac{X^2}{(X^2+1)(X^2+4)}$.

d) Contrôler en $X=0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Partie entière et reste modulo X² + 1

Soit $n \geq 2$ et $F_n = \dfrac{X^n}{X^2+1}$.

a) Montrer que $F_n = E_n + \dfrac{\alpha X + \beta}{X^2+1}$, où $\alpha X + \beta$ est le reste de X^n par X^2+1.

b) En évaluant en i, montrer que $\beta = \mathrm{Re}(\mathrm{i}^n)$ et $\alpha = \mathrm{Im}(\mathrm{i}^n)$.

c) Écrire la décomposition de F_5 et de F_6.

d) Contrôler F_5 en $X = 1$.

Exercice 5 – Élément de seconde espèce double

Soit $F = \dfrac{1}{X(X^2+1)^2}$.

a) Écrire la forme de la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$.

b) Calculer le coefficient de $\dfrac{1}{X}$, puis utiliser l'imparité de F pour annuler des coefficients.

c) Terminer par identification, et contrôler en $X = 1$.

Exercice 6 – De C(X) à R(X) par regroupement

a) Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\frac{\lambda}{X-z} + \frac{\overline{\lambda}}{X-\overline{z}} = \frac{2\mathrm{Re}(\lambda)X - 2\mathrm{Re}(\lambda\overline{z})}{X^2 - 2\mathrm{Re}(z)X + |z|^2}$$

b) On admet $\dfrac{1}{X^3-1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{X-1} + \dfrac{j}{X-j} + \dfrac{j^2}{X-j^2}\right)$. En déduire la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$.

c) Contrôler en $X = 0$.

Exercice 7 – Décomposer 1/(X⁶ − 1) dans R(X)

Soit $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$.

a) Rappeler la décomposition de $\dfrac{1}{X^6-1}$ dans $\mathbb{C}(X)$.

b) Regrouper les pôles ω et $\overline{\omega} = \omega^5$, puis ω^2 et ω^4.

c) Écrire la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ et la contrôler en $X = 0$.

Exercice 8 – Reconnaître une dérivée logarithmique

a) Décomposer $\dfrac{4X^3}{X^4-1}$ dans $\mathbb{R}(X)$ sans calcul de coefficient.

b) En déduire la décomposition de $\dfrac{2X^3}{X^4-1}$ et une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x^3}{x^4-1}$ sur $]1, +\infty[$.

c) Contrôler a) en $X = 2$.

d) Décomposer de même $\dfrac{3X^2+1}{X^3+X}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Trois éléments de seconde espèce

Décomposer $F = \dfrac{X^2}{(X^2+1)(X^2+2)(X^2+3)}$ dans $\mathbb{R}(X)$:

a) en décomposant $G(Y) = \dfrac{Y}{(Y+1)(Y+2)(Y+3)}$;

b) en contrôlant par la somme des coefficients de G et par la valeur de F en 0 ;

c) Que vaut $\lim_{x \to +\infty} x^4 F(x)$? Retrouver ce nombre sur la décomposition.

Exercice 10 – Soustraire l'élément connu

Soit $F = \dfrac{X^4+1}{X(X^2+1)^2}$.

a) Justifier l'absence de partie entière et calculer le coefficient de $\dfrac{1}{X}$.

b) Calculer $F - \dfrac{1}{X}$ et en déduire la décomposition.

c) Contrôler en $X = 1$.

Exercice 11 – Décomposer à coefficients rationnels

a) Vérifier l'identité de Sophie Germain $X^4 + 4 = (X^2 + 2X + 2)(X^2 - 2X + 2)$ et justifier que ces deux trinômes sont irréductibles sur $\mathbb{R}$.

b) Décomposer $\dfrac{1}{X^4+4}$ dans $\mathbb{R}(X)$ (utiliser la parité). Les coefficients sont-ils rationnels ?

c) Contrôler en $X = 0$ et en $X = 1$.

Exercice 12 – Le corps de base change la décomposition

On note $\alpha = \sqrt[3]{2}$.

a) Montrer que $\dfrac{1}{X^3-2}$ est déjà décomposée dans $\mathbb{Q}(X)$ (le dénominateur y est irréductible).

b) Factoriser $X^3 - 2$ dans $\mathbb{R}[X]$ et décomposer $\dfrac{1}{X^3-2}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

c) Contrôler en $X = 0$.

Exercice 13 – Une fraction impaire

Soit $F = \dfrac{X}{X^4-1}$.

a) Écrire la forme de la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$.

b) Calculer le coefficient du pôle 1 ; en déduire celui du pôle -1 par l'imparité.

c) Terminer, et contrôler en $X = 2$.

Exercice 14 – Deux pôles sur le cercle unité

Soit $\theta \in]0, \pi[$ et $F = \dfrac{1}{X^2 - 2X\cos\theta + 1}$.

a) Décomposer F dans $\mathbb{C}(X)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Pour $|x| < 1$, développer chaque élément simple en série géométrique et montrer que $F(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} x^n$.

c) Vérifier les deux premiers coefficients en développant directement F à l'ordre 1 en 0.

Exercice 15 – Synthèse : la famille de dénominateur $X^4 + X^2 + 1$

On note $A = X^2 + X + 1$ et $B = X^2 - X + 1$.

a) Vérifier que $X^4 + X^2 + 1 = AB$, $A - B = 2X$ et $A + B = 2(X^2 + 1)$.

b) En déduire, sans calcul de coefficient, les décompositions de $\frac{X}{AB}$ et de $\frac{X^2+1}{AB}$.

c) Décomposer $\frac{1}{AB}$ (utiliser la parité), et contrôler en $X = 0$.

d) En déduire la décomposition de $\frac{X^2}{AB}$, puis de $\frac{X^3}{AB}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).