Plaquette 4 – Primitives et intégrales de fractions rationnelles

Fractions rationnelles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour intégrer une fraction rationnelle : **partie entière** (polynôme), puis **décomposition en éléments simples**, puis une primitive par type d'élément. Les éléments $\dfrac{1}{(x-a)^k}$ donnent un logarithme ou une puissance ; un élément de seconde espèce $\dfrac{\alpha x+\beta}{x^2+px+q}$ se coupe en $\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{2x+p}{x^2+px+q}$ (un logarithme) plus une constante sur x^2+px+q (une arctangente, après **mise sous forme canonique**). Beaucoup d'intégrales se **ramènent** à ce cas par un changement de variable : $t=\mathrm{e}^x$, $t=\sqrt{x}$, $t=\sin x$, $t=\tan\frac{x}{2}$.

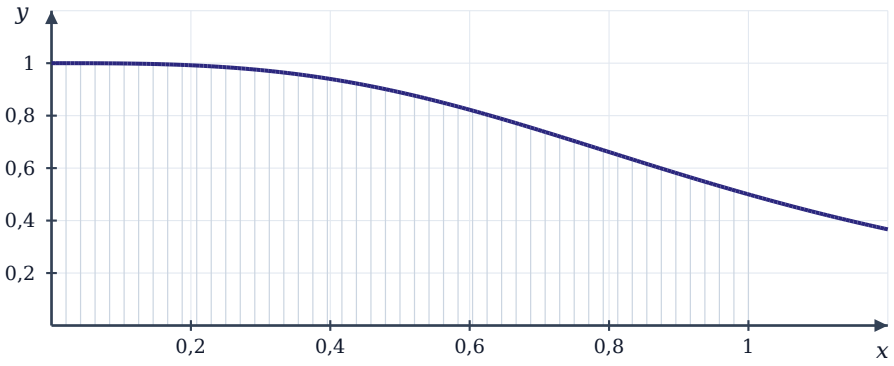
Exercice 1 – Intégrale de 1/(x³ + 1)

On admet $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{1/3}{x+1}+\dfrac{2-x}{3(x^2-x+1)}$.

a) Écrire $2-x$ sous la forme $-\frac{1}{2}(2x-1)+c$.

b) Donner une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{x^3+1}$ sur $]-1,+\infty[$.

c) En déduire $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}=\frac{\ln 2}{3}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, et une valeur approchée (figure).



L'aire hachurée vaut $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.

Exercice 2 – Forme canonique et arctangente

a) Mettre x^2+x+1 sous forme canonique.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$.

c) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$.

Exercice 3 – Logarithme plus arctangente

Calculer $I=\displaystyle\int_0^1\frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$:

a) en écrivant $2x+3=(2x+2)+1$;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) en donnant une primitive ;

c) en donnant la valeur exacte et une valeur approchée.

Exercice 4 – Puissances de 1 + x²

Pour $n \geq 1$, on pose $J_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.

a) Par une intégration par parties, montrer que $J_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(J_n(x) - J_{n+1}(x))$.

b) En déduire $J_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} J_n$.

c) Calculer $J_2(x)$, puis $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$.

d) Calculer $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^3}$.

Exercice 5 – Intégrale avec un pôle double

a) Décomposer $\frac{1}{x(x-1)^2}$ en éléments simples.

b) En déduire $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2}$.

c) Pourquoi ne peut-on pas calculer $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2}$ de cette façon ?

Exercice 6 – Changement de variable t = eˣ

a) Par le changement de variable $t = \mathrm{e}^x$, transformer $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$ en l'intégrale d'une fraction rationnelle.

b) Calculer cette intégrale.

c) Retrouver le résultat en écrivant $\frac{1}{1+\mathrm{e}^x} = 1 - \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

Exercice 7 – Changement de variable t = tan(x/2)

a) Justifier les formules $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$ pour $t = \tan\frac{x}{2}$, $x \in]-\pi, \pi[$.

b) Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$.

c) Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$ par le même changement de variable.

Exercice 8 – Changement de variable u = x²

a) Calculer $\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$ par le changement de variable $u = x^2$.

b) Calculer de même $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x$.

c) Quel point commun permet ces changements de variable ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Changement de variable t = sin x

Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)}\,\mathrm{d}x$:

a) par le changement de variable $t = \sin x$;

b) en décomposant la fraction obtenue ;

c) Contrôler l'ordre de grandeur.

Exercice 10 – Changement de variable t = √x

a) Calculer $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$ par le changement de variable $t = \sqrt{x}$.

b) Calculer $\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}$.

Exercice 11 – Argument tangente hyperbolique

a) Décomposer $\frac{1}{1-x^2}$ et en déduire une primitive sur $]-1,1[$.

b) Calculer $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$.

c) Montrer que cette primitive est la réciproque de th sur $]-1,1[$ (résoudre $\mathrm{th}\, y = x$).

d) Comparer avec $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

Exercice 12 – Une suite d'intégrales et ln 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

a) Calculer I_0 et montrer que $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

b) Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

c) En déduire que $\ln 2 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^n I_n$, puis $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$.

d) Calculer I_2 directement par division euclidienne et vérifier a).

Exercice 13 – Partie entière avant d'intégrer

a) Calculer $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

b) Calculer $\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

c) En déduire l'encadrement $\frac{\pi}{4} > \frac{2}{3}$, en justifiant le signe de l'intégrale de b).

Exercice 14 – Trois pôles simples

a) Décomposer $\frac{1}{x^3-x}$ en éléments simples.

b) Montrer qu'une primitive sur $]1,+\infty[$ est $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-1}{x^2}$.

c) Calculer $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^3-x}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Calculer la limite de $\int_2^A \frac{\mathrm{d}x}{x^3 - x}$ quand $A \to +\infty$.

Exercice 15 – Synthèse : l'intégrale de 1/(1 + x⁴)

On admet la décomposition (plaquette précédente), avec $A = x^2 - \sqrt{2}x + 1$ et $B = x^2 + \sqrt{2}x + 1$:

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{B} - \frac{2x-\sqrt{2}}{A}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{A}\right)$$

a) Vérifier cette écriture à partir de $\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{A} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{B}$.

b) Montrer que $A = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ et en déduire $\int \frac{\mathrm{d}x}{A} = \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x - 1)$; de même pour B.

c) En déduire une primitive G de $\frac{1}{1+x^4}$ sur $\mathbb{R}$.

d) Sachant que $\arctan(\sqrt{2}+1) + \arctan(\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{2}$, montrer que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$, et en donner une valeur approchée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).