Plaquette 5 – Sommes, dérivées n-ièmes et développements

Fractions rationnelles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

La décomposition en éléments simples **linéarise** une fraction : chaque élément $\frac{\lambda}{(x-a)^k}$ se somme, se dérive n fois ou se développe en série géométrique **séparément**. D'où trois usages : les **sommes télescopiques** (on regroupe les éléments pour faire apparaître $u_k - u_{k+1}$), les **dérivées n-ièmes** (on dérive $\frac{1}{x-a}$, éventuellement avec a complexe), et les **coefficients** d'une fraction développée en série (suites récurrentes linéaires, dénombrements).

Exercice 1 – Somme de 1/(k² − 1)

Pour $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$.

a) Décomposer $\frac{1}{k^2-1}$ en éléments simples.

b) Calculer S_n par télescopage.

c) En déduire la limite de S_n et vérifier sur S_2 et S_3.

Exercice 2 – Somme de 1/(4k² − 1)

a) Décomposer $\frac{1}{4k^2-1}$.

b) Calculer $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$ et sa limite.

c) En déduire $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{4k^2-1}$ en fonction de n (écrire $\frac{k^2}{4k^2-1} = \frac{1}{4} + \frac{1/4}{4k^2-1}$).

Exercice 3 – Quatre facteurs consécutifs

a) Montrer que $\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right)$.

b) En déduire $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$ et sa limite.

c) Généraliser : pour $p \geq 1$, que vaut $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)}$?

Exercice 4 – Un télescopage caché

a) Vérifier que $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$.

b) En déduire $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ et sa limite.

c) La décomposition en éléments simples de $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ contient-elle des termes $\frac{1}{k}$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Un produit télescopique

Pour $n \geq 2$, on pose $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

a) Factoriser $1 - \frac{1}{k^2}$ sous forme d'un quotient de produits.

b) Calculer P_n et sa limite.

c) Calculer de même $\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$, sachant que $k^2 + k + 1 = (k+1)^2 - (k+1) + 1$.

Exercice 6 – Dérivée n-ième de 1/(x² − 1)

Soit $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ sur $]1, +\infty[$.

a) Décomposer f en éléments simples.

b) En déduire $f^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Vérifier la formule pour $n = 1$ en dérivant directement.

d) Calculer de même la dérivée n-ième de $g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

Exercice 7 – Dérivée n-ième de 1/(1 + x²)

Soit $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$.

a) Décomposer f dans $\mathbb{C}(X)$ et en déduire $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \, \mathrm{Im}\left(\frac{1}{(x - \mathrm{i})^{n+1}}\right)$.

b) Calculer $f^{(n)}(0)$ selon n. Retrouver le résultat à l'aide du développement $\frac{1}{1+x^2} = \sum_k (-1)^k x^{2k}$ pour $|x| < 1$.

c) En écrivant $x - \mathrm{i} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{\sin\theta}$ avec $x = \operatorname{cotan}\theta$, $\theta \in]0, \pi[$, montrer que $f^{(n)}(x)$ s'annule exactement n fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 – Dérivées en 0 et développement

Soit $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$.

a) Décomposer f en éléments simples.

b) Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout n.

c) En déduire le développement de f en série au voisinage de 0 (pour $|x| < 1$), et le vérifier sur les deux premiers termes.

Exercice 9 – Suite récurrente et fraction génératrice

On définit $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

a) Calculer u_2, u_3, u_4.

b) On admet que, pour $|x|$ petit, $\sum_{n \geq 0} u_n x^n = \frac{1}{1 - x - 2x^2}$. Décomposer cette fraction en éléments simples.

c) En déduire $u_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$, et vérifier sur a).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Télescopage d'arctangentes

a) Montrer que pour $k \geq 0$, $\arctan(k+1) - \arctan k = \arctan \dfrac{1}{k^2+k+1}$.

b) En déduire $\sum_{k=0}^{n} \arctan \dfrac{1}{k^2+k+1}$ et sa limite.

c) Vérifier numériquement pour $n = 3$.

Exercice 11 – Une somme qui converge

Soit $v_k = \dfrac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)}$.

a) Décomposer v_k en éléments simples et vérifier que la somme des coefficients est nulle.

b) Écrire v_k comme combinaison de deux différences $\dfrac{1}{k+j} - \dfrac{1}{k+j+1}$.

c) En déduire $\sum_{k=1}^{n} v_k$ et sa limite. Vérifier pour $n = 1$.

d) Pourquoi $\sum \dfrac{k^2}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ ne peut-elle pas converger ?

Exercice 12 – La somme harmonique n'est pas une fraction rationnelle

On veut montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(X+1) - F(X) = \dfrac{1}{X}$ (ce qui donnerait $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = F(n+1) - F(1)$).

a) Montrer que F ne peut pas être un polynôme.

b) On suppose que F a des pôles. Soit a un pôle de F de partie réelle **maximale**. Montrer que a est un pôle de $F(X+1) - F(X)$, puis que $a = 0$.

c) Soit b un pôle de F de partie réelle **minimale**. Montrer que $b - 1$ est un pôle de $F(X+1) - F(X)$ et conclure.

d) En revanche, trouver F telle que $F(X+1) - F(X) = \dfrac{1}{X(X+1)}$.

Exercice 13 – Payer avec des pièces de 1 € et 2 €

On note c_n le nombre de façons de payer n euros avec des pièces de 1 € et de 2 € (l'ordre ne compte pas).

a) Calculer $c_0, \ldots, c_5$ à la main.

b) On admet que $\sum_{n \geq 0} c_n x^n = \dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ pour $|x| < 1$. Décomposer $\dfrac{1}{(1-x)^2(1+x)}$ sous la forme $\dfrac{a}{(1-x)^2} + \dfrac{b}{1-x} + \dfrac{c}{1+x}$.

c) En déduire $c_n = \dfrac{n+1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{(-1)^n}{4}$, puis $c_n = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

d) Interpréter directement cette dernière formule.

Exercice 14 – Sommes de Riemann de fractions rationnelles

a) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k^2} \to \dfrac{\pi}{4}$ quand $n \to +\infty$.

b) Déterminer la limite de $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{(n+k)(n+2k)}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Déterminer la limite de $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$.

Exercice 15 – Synthèse : le problème de Bâle

Soit $m \geq 1$ et $n = 2m+1$. Pour $1 \leq k \leq m$, on pose $\theta_k = \frac{k\pi}{n}$ et $x_k = \operatorname{cotan}^2\theta_k$.

Partie A : une somme de cotangentes.

a) Montrer que $(\operatorname{cotan}\theta + \mathrm{i})^n = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{\sin^n\theta}$, puis que $\operatorname{Im}\left((\operatorname{cotan}\theta_k + \mathrm{i})^n\right) = 0$.

b) En développant par le binôme, en déduire que les x_k sont racines de $P = \binom{n}{1}X^m - \binom{n}{3}X^{m-1} + \binom{n}{5}X^{m-2} - \ldots$ Justifier qu'elles sont distinctes, donc que ce sont **les** m racines de P.

c) En déduire $\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotan}^2\theta_k = \frac{m(2m-1)}{3}$.

Partie B : encadrement.

d) Admettant $\operatorname{cotan}^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \operatorname{cotan}^2\theta$ pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, montrer que

$$\frac{m(2m-1)}{3} < \frac{n^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} < m + \frac{m(2m-1)}{3}$$

e) En déduire $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).