Plaquette 2 – Techniques de décomposition dans C(X)

Fractions rationnelles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Avant tout calcul : **comparer les degrés** (partie entière), **factoriser le dénominateur** et écrire la **forme** de la décomposition, avec un coefficient inconnu par élément simple. Ensuite, on choisit l'outil le plus rapide pour chaque coefficient : la formule $\frac{P(a)}{Q'(a)}$ pour un pôle simple, un **développement limité** (ou la formule de Taylor) pour un pôle multiple, et des **symétries** (parité, conjugaison, $X \mapsto c - X$) pour ne calculer qu'une partie des coefficients. On termine toujours par un contrôle : valeur en un point, ou limite de $xF(x)$.

Exercice 1 – Trois pôles simples et contrôle asymptotique

Soit $F = \dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X+3)}$.

a) Justifier que F n'a pas de partie entière et écrire la forme de sa décomposition.

b) Calculer les trois coefficients.

c) Vérifier le résultat par la limite de $xF(x)$ en $+\infty$, puis par la valeur en 0.

Exercice 2 – Pôle double par la formule de Taylor

Soit $F = \dfrac{X^2+1}{(X-1)^2(X+1)}$.

a) Écrire la forme de la décomposition.

b) Calculer le coefficient du pôle simple -1.

c) On pose $G = (X-1)^2 F = \frac{X^2+1}{X+1}$. Montrer que les coefficients de $\frac{1}{(X-1)^2}$ et de $\frac{1}{X-1}$ sont $G(1)$ et $G'(1)$, et les calculer.

d) Contrôler le résultat.

Exercice 3 – Pôle triple et pôle double

Décomposer $F = \dfrac{1}{X^3(X-1)^2}$ dans $\mathbb{C}(X)$:

a) en utilisant un développement limité de $\frac{1}{(1-X)^2}$ en 0 pour la partie polaire en 0 ;

b) en utilisant $H = \frac{1}{X^3}$ et la formule de Taylor pour la partie polaire en 1.

c) Contrôler par la somme des coefficients des $\frac{1}{X-a}$ et par la valeur en 2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Décomposition de 1/(Xⁿ − 1)

Soit $n \geq 2$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$.

a) Montrer que $\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega^k}{X - \omega^k}$.

b) Vérifier pour $n = 2$.

c) Décomposer de même $\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$, et reconnaître une dérivée logarithmique.

d) En déduire, pour $x > 1$, la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x - \omega^k}$.

Exercice 5 – Pôles complexes conjugués

Soit $F = \frac{1}{X^2 + X + 1}$.

a) Déterminer les pôles de F et décomposer F dans $\mathbb{C}(X)$.

b) Expliquer pourquoi les deux coefficients sont conjugués.

c) Vérifier en $X = 0$.

Exercice 6 – Utiliser la parité

Soit $F = \frac{1}{(X^2 - 1)^2}$.

a) Écrire la forme de la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$.

b) Calculer les coefficients relatifs au pôle 1.

c) Utiliser $F(-X) = F(X)$ et l'unicité pour obtenir ceux du pôle -1 sans calcul.

d) Contrôler en $X = 0$.

Exercice 7 – Une symétrie X ↦ −1 − X

Soit $F = \frac{1}{X^2(X+1)^2}$.

a) Vérifier que $F(-1 - X) = F(X)$.

b) Calculer la partie polaire en 0 par un développement limité.

c) En déduire la partie polaire en -1 par symétrie, puis la décomposition complète.

d) Contrôler en $X = 1$, puis calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ en fonction de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 8 – Coefficients par la limite en l'infini

Soit $F = \frac{2X^2 + 1}{(X-1)^2(X+2)}$.

a) Écrire la forme de la décomposition.

b) Calculer les coefficients de $\frac{1}{X+2}$ et de $\frac{1}{(X-1)^2}$ par la méthode du cache.

c) Obtenir le dernier coefficient en calculant la limite de $xF(x)$ quand $x \to +\infty$.

d) Contrôler en $X = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Partie entière de degré 2

Soit $F = \dfrac{X^4}{X^2-1}$.

a) Déterminer la partie entière de F par division euclidienne.

b) Décomposer F en éléments simples.

c) En déduire que la courbe de $x \mapsto F(x)$ est asymptote, en $\pm\infty$, à une parabole que l'on précisera, et donner la position relative.

Exercice 10 – Partie entière et pôle double à l'origine

Décomposer $F = \dfrac{X^3+1}{X^2(X-1)}$:

a) partie entière ;

b) pôle simple 1 ;

c) pôle double 0, par un développement limité de X^2F ;

d) contrôle en $X = 2$ et en $X = -1$.

Exercice 11 – Décomposition de P′/P

a) Soit $P = c\prod_i (X-a_i)^{m_i}$ scindé. Montrer que $\dfrac{P'}{P} = \sum_i \dfrac{m_i}{X-a_i}$.

b) Décomposer $\dfrac{3X^2-1}{X^3-X}$ sans calcul.

c) Décomposer $\dfrac{P'}{P}$ pour $P = (X-1)^2(X+2)^3$ et vérifier en $X = 0$.

d) Montrer qu'une fraction $F = \sum \dfrac{\lambda_i}{X-a_i}$ est de la forme $\dfrac{P'}{P}$ avec P polynôme si et seulement si les λ_i sont des entiers naturels non nuls.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

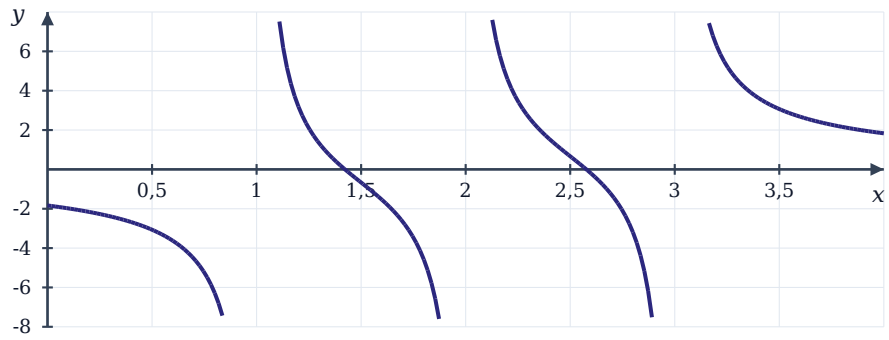
Exercice 12 – Retrouver une fraction à partir de sa décomposition

Soit $F = \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{1}{X-2} + \dfrac{1}{X-3}$.

a) Écrire F sous forme d'une seule fraction.

b) Déterminer les zéros de F et montrer qu'ils s'intercalent entre les pôles.

c) Étudier le signe de F sur $]1,2[$ et $]2,3[$ (figure) et expliquer, sans calcul, pourquoi F s'annule exactement une fois sur chacun de ces intervalles.



La courbe de $x \mapsto \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$; asymptotes verticales en 1, 2 et 3.

Exercice 13 – Coefficients de Lagrange et décomposition

Soient $a_1, \dots, a_n$ des complexes distincts ($n \geq 2$) et $Q = \prod_{j=1}^{n} (X - a_j)$.

a) Montrer que $\dfrac{1}{Q} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{Q'(a_i)} \dfrac{1}{X - a_i}$ et que $Q'(a_i) = \prod_{j \neq i} (a_i - a_j)$.

b) En déduire $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)} = 0$.

c) Plus généralement, pour P de degré $\leq n-2$, montrer que $\sum_i \dfrac{P(a_i)}{Q'(a_i)} = 0$. Que vaut cette somme si $P = X^{n-1}$?

d) Vérifier b) et c) avec $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$.

Exercice 14 – Pôle double complexe

Soit $F = \dfrac{1}{(X^2+1)^2}$.

a) Écrire la forme de la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$.

b) Calculer la partie polaire en i avec $G = \dfrac{1}{(X+\mathrm{i})^2}$.

c) En déduire la partie polaire en $-\mathrm{i}$ par conjugaison.

d) Contrôler en $X = 0$.

Exercice 15 – Synthèse : la fraction 1/(X(X + 1)⋯(X + n))

Soit $n \geq 1$ et $F_n = \dfrac{1}{X(X+1)\cdots(X+n)}$.

a) Montrer que le coefficient du pôle $-k$ ($0 \leq k \leq n$) vaut $\dfrac{(-1)^k}{k!\,(n-k)!}$, et en déduire

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$F_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{X+k}$$

b) En utilisant $xF_n(x) \to 0$, retrouver $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$.

c) En évaluant en $X = 1$, montrer que $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$. Vérifier pour $n = 2$.

d) Retrouver c) en intégrant $(1-t)^n$ sur $[0,1]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).