Plaquette 2 – Calculs de limites : formes indéterminées

Limites et continuité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Limites de référence en 0 :

$$\frac{\sin x}{x} \to 1, \quad \frac{e^x - 1}{x} \to 1, \quad \frac{\ln(1+x)}{x} \to 1, \quad \frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}, \quad \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \to \alpha$$

— **Puissance variable** : $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$, puis limite de l'exposant.
— **Conjuguée** : $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$.
— **Partie entière** : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x$ (encadrement).
— **Encadrements utiles** : $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$ $(x \ge 0)$, $1 + x \le e^x$.

Correction de l'exercice 1 – Formes 1^∞

a) $\frac{\ln(1+\sin x)}{x} = \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \to 1 \times 1$: limite e.

b) $\frac{\ln\cos x}{x^2} = \frac{\ln(1+(\cos x - 1))}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} \to 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$:

$$(\cos x)^{1/x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^{-1/2} \approx 0{,}6065$$

c) $\frac{\ln(1+x^2)}{x} \sim \frac{x^2}{x} = x \to 0$: limite 1.

d) 2,7169 est proche de e ≈ 2,7183 ; 0,60653 ≈ $e^{-0,5}$ ✓

Réponse. a) e ; b) $e^{-1/2}$; c) 1.

Correction de l'exercice 2 – Formes 0^0 et ∞^0

a) $\sin x \ln x = \frac{\sin x}{x} \cdot x\ln x \to 1 \times 0$: limite $e^0 = 1$ (numériquement 0,99312 pour $x = 10^{-3}$, convergence lente).

b) $\frac{\ln\ln x}{x} \to 0$ et $\frac{\ln x}{x} \to 0$: les deux limites valent 1.

c) $x^x = e^{x\ln x} \to 1$. Puis $x^{x^x} = e^{x^x \ln x}$ et $x^x \ln x \to 1 \times (-\infty)$:

$$x^{x^x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

d) $\tan x \ln\sin x = \frac{\tan x}{\sin x} \cdot \sin x \ln\sin x \to 1 \times 0$ (car $u\ln u \to 0$ avec $u = \sin x \to 0^+$) : limite 1.

Réponse. a) 1 ; b) 1 et 1 ; c) 0 ; d) 1.

Correction de l'exercice 3 – Quantités conjuguées

a)

$$\sqrt{x^2+x+1} - x = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x+1/x^2}+1} \to \frac{1}{2}$$

— (contrôle $x = 10^6$: 0,5000004).

b) En $-\infty$, $-x \to +\infty$ et $\sqrt{\cdots} \to +\infty$: pas de forme indéterminée, limite $+\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\sqrt{x^2+x} = x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$; il faut $a=1$, puis $\sqrt{x^2+x}-x = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} \to \frac{1}{2}$: $b=\frac{1}{2}$, asymptote $y = x+\frac{1}{2}$.

d) $\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \to 1$.

Réponse. a) $\frac{1}{2}$; b) $+\infty$; c) $y = x+\frac{1}{2}$; d) 1.

Correction de l’exercice 4 – Changement de variable X = 1/x

a) $X = \frac{1}{x} \to 0^+$: $\frac{\mathrm{e}^X - 1}{X} \to 1$.

b) $\frac{\sin X}{X} \to 1$; $\frac{1-\cos X}{X^2} \to \frac{1}{2}$.

c) Avec $X = \frac{1}{x}$:

$$-\frac{X^2}{2} \le \ln(1+X) - X \le -\frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} \quad\Longrightarrow\quad -\frac{1}{2} \le x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) \le -\frac{1}{2} + \frac{1}{3x}$$

— limite $-\frac{1}{2}$ par encadrement.

d) $-0{,}4983 \in \left]-0{,}5, -0{,}5 + \frac{1}{600}\right]$ ✓

Réponse. a) 1 ; b) 1 et $\frac{1}{2}$; c) $-\frac{1}{2}$.

Correction de l’exercice 5 – Parties entières

a) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x$, donc $1 - \frac{1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \le 1$: limite 1.

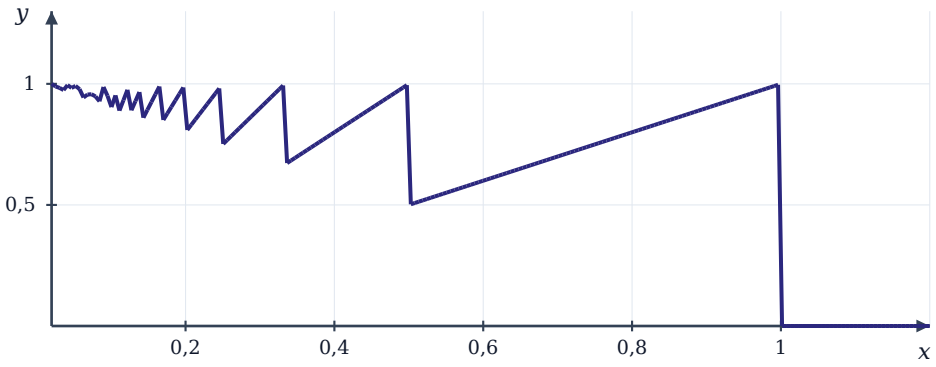
b) $\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \le \frac{1}{x}$; en multipliant par $x > 0$:

$$1 - x < x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \le 1 \quad\Longrightarrow\quad x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

c) $x^2\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = x \cdot x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \to 0 \times 1$ (à droite, et de même à gauche). À gauche, $x < 0$: l’encadrement s’inverse, $1 \le x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor < 1 - x$, limite 1 aussi.

d) $\lfloor x \rfloor = 2$ sur $[2, 3[$: continue à droite ; $\lfloor x \rfloor = 1$ sur $[1, 2[$: limite à gauche $1 \neq 2$, pas continue à gauche.

Réponse. a) 1 ; b) 1 ; c) 0 et 1 ; d) continue à droite seulement en 2.



La fonction $x \mapsto x\lfloor 1/x \rfloor$ sur $]0, 1{,}2]$

Correction de l’exercice 6 – Rapports de sinus et de tangentes

a) $\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{3}{5} \to \frac{3}{5}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\tan x - \sin x = \tan x(1-\cos x)$:

$$\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2} \to 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

c) $\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\cdot\frac{9x^2}{x\sin x}\to\frac{1}{2}\times 9=\frac{9}{2}$.

d) $\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}\to 1\times 2=2$.

Réponse. a) $\frac{3}{5}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{9}{2}$; d) 2.

Correction de l’exercice 7 – Limites unilatérales

a) $\frac{1}{x}\to\pm\infty$: $\mathrm{e}^{1/x}\to+\infty$ en 0^+, 0 en 0^- ; $\arctan\frac{1}{x}\to\frac{\pi}{2}$ en 0^+, $-\frac{\pi}{2}$ en 0^-.

b) En 0^+ : 0 ; en 0^- : 1. Limites à droite et à gauche différentes : **pas** de prolongement continu (saut visible sur la figure).

c) $-\frac{1}{x^2}\to-\infty$, donc $\mathrm{e}^{-1/x^2}\to 0$: prolongement par 0.

d) $\frac{\mathrm{e}^{-1/x^2}-0}{x}$: avec $X=\frac{1}{|x|}\to+\infty$,

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x}\right| = X\mathrm{e}^{-X^2}\to 0$$

— (croissances comparées) : dérivable, de dérivée nulle en 0.

Réponse. $\mathrm{e}^{1/x}$: $+\infty$ / 0 ; $\frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$: 0 / 1, non prolongeable ; e^{-1/x^2} prolongeable et dérivable en 0.

Correction de l’exercice 8 – Discussion selon un paramètre

a) $a\neq 0$: $\frac{ax^3}{x^2}=ax\to\pm\infty$ selon le signe de a. $a=0$: $\frac{-2x^2+1}{x^2+5}\to -2$.

b) $\sqrt{x^2+1}-ax = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-a\right)$: si $a<1$, $+\infty$; si $a>1$, $-\infty$; si $a=1$, conjuguée : $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\to 0$.

c) $\frac{\sin(ax)}{x}\to a$: $a=3$.

d) Il faut que le numérateur tende vers 0 : $b-1=0$, $b=1$. Alors

$$\frac{ax+1-\sqrt{1+x}}{x} = a-\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\to a-\frac{1}{2}$$

— limite finie pour tout a (avec $b=1$), égale à $a-\frac{1}{2}$.

Réponse. a) $\pm\infty$ ou -2 ; b) 0 si $a=1$, $\pm\infty$ sinon ; c) $a=3$; d) $b=1$, limite $a-\frac{1}{2}$.

Correction de l’exercice 9 – Exponentielle et encadrement

a) $h(x)=\mathrm{e}^x-1-x-\frac{x^2}{2}$ vérifie $h(0)=h'(0)=h''(0)=0$ et $h'''=\mathrm{e}^x$; en intégrant trois fois l’encadrement $1\le h'''\le \mathrm{e}^x$ sur $[0,x]$ (fonction croissante), on obtient $0\le h(x)\le\frac{x^3}{6}\mathrm{e}^x$.

b) $\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}+\frac{h(x)}{x^2}$, et $0\le\frac{h(x)}{x^2}\le\frac{x\,\mathrm{e}^x}{6}\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— (en 0^-, même argument avec $|h(x)| \le \frac{|x|^3}{6}$).

c) $e^x - e^{-x} - 2x = 2(\mathrm{sh}x - x)$; avec a) appliqué à $\pm x$, la limite vaut $2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

d) 0,500167 ✓ (l'écart $\approx \frac{x}{6}$).

Réponse. $\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \to \frac{1}{2}$; $\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3} \to \frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 10 – Logarithmes et comparaisons

a) $\ln(1 + x^2) = 2\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$: le rapport vaut $2 + \frac{\ln(1 + 1/x^2)}{\ln x} \to 2$.

b) $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \to 0$; $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \to 1$.

c) $\ln(e^x + x) = x + \ln(1 + xe^{-x})$:

$$\frac{\ln(e^x + x)}{x} \to 1, \qquad \ln(e^x + x) - x \to \ln 1 = 0$$

d) $x \ln(e^{1/x}(1 + e^{-1/x})) = 1 + x\ln(1 + e^{-1/x}) \to 1$.

Réponse. a) 2 ; b) 0 et 1 ; c) 1 et 0 ; d) 1.

Correction de l'exercice 11 – Asymptote oblique de x e^(1/x)

a) $\pm\infty$ en $\pm\infty$. En 0^+ : $X = \frac{1}{x} \to +\infty$, $f = \frac{e^X}{X} \to +\infty$. En 0^- : $e^{1/x} \to 0$ et $x \to 0$: $f \to 0$.

b) $f(x) - x = \frac{e^X - 1}{X} \to 1$ (avec $X = \frac{1}{x} \to 0$).

c) Pour $x > 0$, $X > 0$:

$$f(x) - (x + 1) = \frac{e^X - 1 - X}{X} \ge \frac{X}{2} > 0$$

— la courbe est **au-dessus** de l'asymptote en $+\infty$.

d) $f'(x) = e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$: décroissante sur $]0, 1]$, croissante sur $[1, +\infty[$, minimum $f(1) = e$.

Réponse. Asymptote $y = x + 1$ en $\pm\infty$ (courbe au-dessus en $+\infty$) ; minimum e en 1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction de l'exercice 12 – Limites de puissances de référence

a) C'est le taux d'accroissement de $t \mapsto (1 + t)^\alpha$ en 0, dont la dérivée vaut α.

b) $\frac{1}{3}$; et $\frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} - \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

c) $\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x = x\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/3} - 1\right) = \frac{(1 + X)^{1/3} - 1}{X}$ avec $X = \frac{1}{x}$:

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

d) $\frac{\sqrt{1{,}001} - 1}{0{,}001} \approx 0{,}49988$ ✓ (proche de $\frac{1}{2}$).

Réponse. $\frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} \to \alpha$; b) $\frac{1}{3}$ et 0 ; c) $\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 13 – Composition et changement de variable

a) $\frac{\ln(1 + h)}{h} \to 1$.

b) $h = \frac{\pi}{2} - x \to 0$: $\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \frac{1}{\tan h}$, donc $\frac{h}{\tan h} \to 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Factorisation $x^n - 1 = (x-1)(1 + x + \cdots + x^{n-1}) \to n$; ou taux d'accroissement de x^n en 1 : n.

d) $\frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$ et $x \ln\left(1 + \frac{3}{x-1}\right) \sim \frac{3x}{x-1} \to 3$:

$$\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x \to \mathrm{e}^3$$

Réponse. a) 1 ; b) 1 ; c) n ; d) e^3.

Correction de l'exercice 14 – Limite d'une différence de puissances

a) $\frac{a^x - 1}{x} - \frac{b^x - 1}{x} \to \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$.

b) $X = \frac{1}{x} : \frac{a^X - 1}{X} \to \ln a$.

c) $x^{1+1/x} - x = x\left(\mathrm{e}^{\ln x / x} - 1\right)$ et $u = \frac{\ln x}{x} \to 0$:

$$x(\mathrm{e}^u - 1) = x\,u\,\frac{\mathrm{e}^u - 1}{u} \sim x \cdot \frac{\ln x}{x} = \ln x \to +\infty$$

d) $x^{1/x} - 1 = \mathrm{e}^u - 1 \sim u = \frac{\ln x}{x}$.

Réponse. a) $\ln \frac{a}{b}$; b) $\ln a$; c) $x^{1+1/x} - x \sim \ln x \to +\infty$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : une limite en cascade

a) Pour $x > 0$: $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, d'où $1 - \frac{x}{2} \le \frac{\ln(1+x)}{x} \le 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}$: $\varepsilon(x) \in \left[0, \frac{x}{3}\right]$.

b) $(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \mathrm{e}^{1 - x/2 + x\varepsilon(x)}$.

c)

$$\frac{(1+x)^{1/x} - \mathrm{e}}{x} = \mathrm{e} \cdot \frac{\mathrm{e}^u - 1}{u} \cdot \frac{u}{x}, \quad u = -\frac{x}{2} + x\varepsilon(x)$$

— avec $\frac{u}{x} \to -\frac{1}{2}$ et $\frac{\mathrm{e}^u - 1}{u} \to 1$: $L = -\frac{\mathrm{e}}{2} \approx -1{,}359$.

d) $\frac{2{,}716924 - 2{,}718282}{0{,}001} \approx -1{,}358$ ✓

Réponse. $(1+x)^{1/x} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x + o(x)$, donc $L = -\frac{\mathrm{e}}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).