Plaquette 3 – Continuité : TVI, bornes et bijections

Limites et continuité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

TVI : si f est continue sur $[a,b]$ et $f(a)f(b) \leq 0$, alors

$$\exists c \in [a,b], \quad f(c) = 0$$

— **Bornes** : f continue sur $[a,b] \Rightarrow \exists\, x_1, x_2,\ f(x_1) = \min f,\ f(x_2) = \max f$; $f([a,b]) = [m,M]$.

— **Bijection** : f continue strictement croissante sur $I \Rightarrow f : I \to f(I)$ bijective, f^{-1} continue et strictement croissante.

— **Injective et continue** sur un intervalle ⇒ strictement monotone.

— **Dichotomie** : après n étapes sur $[a,b]$, l'erreur est au plus $\dfrac{b-a}{2^n}$.

Correction de l'exercice 1 – Polynômes de degré impair

a) $P(x) = x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right)$ et la parenthèse tend vers 1 ; n impair : $P \to +\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$ en $-\infty$.

b) Il existe A avec $P(A) > 0$ et $P(-A) < 0$; P est continue sur $[-A,A]$: le TVI donne une racine.

c) Non : $x^2 + 1$ n'a aucune racine réelle.

d) $P'(x) = 5x^4 - 3$ s'annule en $\pm\alpha$, $\alpha = (3/5)^{1/4} \approx 0{,}880$. P croît, décroît, croît. Or

$$P(-\alpha) \approx 3{,}11 > 0, \qquad P(\alpha) \approx -1{,}11 < 0$$

— avec les limites $\mp\infty$: une racine sur chaque intervalle $]-\infty,-\alpha]$, $[-\alpha,\alpha]$, $[\alpha,+\infty[$, et une seule par stricte monotonie : **trois** racines.

Réponse. Tout polynôme de degré impair a une racine réelle ; $x^5 - 3x + 1$ en a exactement trois.

Correction de l'exercice 2 – Théorème de la corde universelle

a) $g(0) + g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) + f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f(0) = 0$.

b) $g(0)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$ sont opposés, donc de signes contraires (au sens large) ; g est continue : le TVI donne $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ avec $g(c) = 0$.

c) La somme **télescopique** :

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0$$

— les n valeurs ne peuvent être toutes > 0 ni toutes < 0 : deux d'entre elles sont de signes contraires (ou l'une est nulle), et le TVI entre ces deux points conclut.

d) Sur tout circuit fermé, il existe deux points distants d'une demi-longueur de parcours (ou d'un n-ième) à la même altitude.

Réponse. Il existe toujours une corde horizontale de longueur $\frac{1}{n}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – L'équation cos x = x

a) $h(x) = \cos x - x$, $h'(x) = -\sin x - 1 \le 0$, nul seulement en des points isolés : h strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. $h(0) = 1 > 0$, $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$: unique zéro, dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) $h(0{,}5) \approx 0{,}378 > 0$: $[0{,}5; 1]$; $h(0{,}75) \approx -0{,}018 < 0$: $[0{,}5; 0{,}75]$; $h(0{,}625) \approx 0{,}186 > 0$: $[0{,}625; 0{,}75]$.

c) Il faut $\frac{1}{2^n} \le 10^{-6}$, soit

$$n \ge \frac{6 \ln 10}{\ln 2} \approx 19{,}9 \quad \Longrightarrow \quad n = 20$$

d) $\alpha \approx 0{,}739085$ (le « nombre de Dottie »).

Réponse. Unique solution $\alpha \approx 0{,}739085$; 20 étapes de dichotomie pour 10^{-6}.

Correction de l'exercice 4 – Injective et continue implique monotone

a) φ est continue par composition. Posons $x_t = (1-t)x + tx'$ et $y_t = (1-t)y + ty'$: ce sont des points de I (convexité) et $y_t - x_t = (1-t)(y-x) + t(y'-x') > 0$. Donc $x_t \neq y_t$ et, f étant injective, $\varphi(t) \neq 0$.

b) Une fonction continue qui ne s'annule pas sur $[0,1]$ garde un signe constant (TVI) :

$$\varphi(0) = f(y) - f(x) \quad \text{et} \quad \varphi(1) = f(y') - f(x') \quad \text{ont le même signe}$$

c) Le signe de $f(y) - f(x)$ pour $x < y$ ne dépend pas du couple : toujours > 0 (f strictement croissante) ou toujours < 0 (strictement décroissante).

d) $f(x) = x$ sur $[0,1[$, $f(x) = 3 - x$ sur $[1,2]$: injective, non monotone (discontinue en 1). Et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$: continue, injective, non monotone.

Réponse. Une fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone.

Correction de l'exercice 5 – Minimum d'une fonction coercive

a) C'est la définition de la limite $+\infty$ avec le seuil $f(0) + 1$, en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Sur le segment $[-A, A]$, f atteint un minimum $m = f(x_0) \le f(0)$. Hors du segment, $f(x) > f(0) \ge m$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \ge f(x_0)$$

c) En $+\infty$, x^4 l'emporte ; en $-\infty$, $x^4 \to +\infty$ et $e^{-x} \to +\infty$: la fonction est coercive et continue, elle atteint son minimum.

d) Pas forcément : $x \mapsto -\frac{1}{1+x^2}$ atteint son minimum -1 mais pas de maximum (sup 0 non atteint). Par l'argument de b), une telle fonction qui prend une valeur > 0 atteint son maximum.

Réponse. Continue et coercive ⇒ minimum atteint (on se ramène à un segment).

Correction de l'exercice 6 – Fonctions périodiques continues

a) $f([0,T])$ est un segment $[m,M]$ (bornes). Tout x s'écrit $x = kT + r$ avec $r \in [0,T[$ et $f(x) = f(r) \in [m,M]$; m et M sont atteints.

b) Découle de a) : $f(\mathbb{R}) = f([0,T]) = [m,M]$.

c) $|\sin x + \sin\sqrt{2}x| \le 2$. Mais elle n'est **pas périodique** ($\sqrt{2}$ irrationnel) : on ne peut pas se ramener à un segment. En fait la valeur 2 n'est jamais atteinte (il faudrait $x \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$ et $\sqrt{2}x \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$, d'où $\sqrt{2}$ rationnel), mais elle est approchée d'aussi près qu'on veut.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Si $f(a) \neq f(b)$, les suites $a + nT$ et $b + nT$ tendent vers $+\infty$ et

$$f(a + nT) = f(a) \neq f(b) = f(b + nT)$$

— deux limites différentes le long de deux suites : pas de limite.

Réponse. Continue périodique $\Rightarrow$ bornée, bornes atteintes, et pas de limite en $+\infty$ sauf si constante.

Correction de l'exercice 7 – Prolongements et continuité par morceaux

a) $\frac{\sin ax}{x} \to a$: continue en 0 si et seulement si $a = 2$ (et continue ailleurs).

b) $|g(x)| \leq |x| \to 0$: continue. Pour h : $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 0$ et $h(x_n) = 1$, $y_n = \frac{1}{n\pi} \to 0$ et $h(y_n) = 0$: pas de limite, discontinue.

c) En 0 : $b = \mathrm{e}^0 = 1$. En 1 : $a + b = \ln 1 = 0$, d'où

$$a = -1, \quad b = 1$$

d) Continue sur chaque $]n, n+1[$. En n : à droite, $n + \sqrt{0} = n$; à gauche, $\lfloor x \rfloor = n - 1$ et $x - \lfloor x \rfloor \to 1$: $n - 1 + 1 = n$. Continue sur $\mathbb{R}$.

Réponse. a) $a = 2$; b) g continue, h non ; c) $a = -1$, $b = 1$; d) continue.

Correction de l'exercice 8 – Une fonction continue en un seul point

a) $|f(x)| \leq |x|$ pour tout x : $f(x) \to 0 = f(0)$.

b) Densité : il existe $r_n \in \mathbb{Q}$ et $s_n \notin \mathbb{Q}$ tendant vers a. Alors

$$f(r_n) = r_n \to a, \qquad f(s_n) = 0 \to 0 \neq a$$

c) f est continue en 0 et seulement en 0.

d) $f(x) = (x-1)(x-2)$ si $x \in \mathbb{Q}$, 0 sinon : même raisonnement, continuité exactement là où $(x-1)(x-2) = 0$.

Réponse. f n'est continue qu'en 0 ; $(x-1)(x-2)\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ l'est exactement en 1 et 2.

Correction de l'exercice 9 – Images d'intervalles

a) x^2 est décroissante sur $[-1, 0]$ et croissante sur $[0, 2]$: image $[0, 4]$.
$\sin(]0, 2\pi[) = [-1, 1]$ (atteints en $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$).

b) Exemple précédent : ouvert $\to$ fermé. Et $x \mapsto \frac{1}{x}$ envoie $]0, 1]$ sur $[1, +\infty[$, non borné.

c) Image d'un intervalle = intervalle (TVI) ; bornée, bornes atteintes (théorème des bornes) :

$$f([a, b]) = [\min f, \max f]$$

d) De $[0, 1]$ sur $]0, 1[$: **non**, l'image d'un segment est un segment. De $]0, 1[$ sur $[0, 1]$: **oui**, par exemple $x \mapsto \frac{1 + \sin(4\pi x)}{2}$, qui atteint 0 et 1.

Réponse. $[0, 4]$ et $[-1, 1]$; image d'un segment = segment ; pas de surjection continue $[0, 1] \to]0, 1[$, mais l'inverse existe.

Correction de l'exercice 10 – La bijection x + e^x

a) f est continue, $f' = 1 + \mathrm{e}^x > 0$: strictement croissante ; limites $-\infty$ et $+\infty$. Bijection $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, réciproque continue strictement croissante.

b) $f(0) = 1$ donc $f^{-1}(1) = 0$; $f(1) = 1 + \mathrm{e}$ donc $f^{-1}(1 + \mathrm{e}) = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Si $x = f^{-1}(y)$, $e^x = y - x$ et $x = \ln(y - x)$. Pour y grand, $0 < x < y$ et $x \to +\infty$; on a $x \leq \ln y$ et $x = \ln y + \ln\left(1 - \frac{x}{y}\right)$ avec $\frac{x}{y} \leq \frac{\ln y}{y} \to 0$:

$$\frac{f^{-1}(y)}{\ln y} \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

d) $x \to -\infty$ et $y = x + e^x$ avec $e^x \to 0$: $\frac{y}{x} = 1 + \frac{e^x}{x} \to 1$.

Réponse. Bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; $f^{-1}(1) = 0$; $f^{-1}(y) \sim \ln y$ en $+\infty$, $\sim y$ en $-\infty$.

Correction de l'exercice 11 – Suite de racines $x^n + x - 1 = 0$

a) f_n est continue, strictement croissante sur $[0, 1]$, $f_n(0) = -1 < 0 < 1 = f_n(1)$: racine unique. $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618$.

b) Avec $u_n^n = 1 - u_n$:

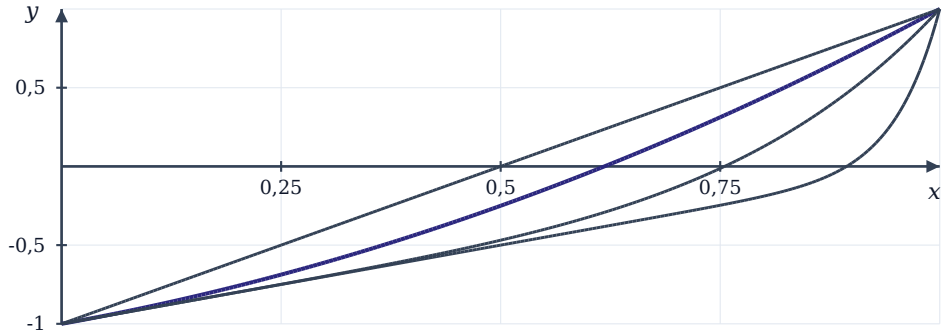
$$f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + u_n - 1 = u_n^{n+1} - u_n^n = u_n^n(u_n - 1) < 0$$

— donc $u_n < u_{n+1}$ (f_{n+1} croissante, nulle en u_{n+1}).

c) Croissante, majorée par 1 : converge vers $\ell \leq 1$.

d) Si $\ell < 1$: $0 < u_n \leq \ell$ donc $u_n^n \leq \ell^n \to 0$, et $u_n = 1 - u_n^n \to 1$, contradiction. Donc $\ell = 1$ (numériquement $u_{10} \approx 0{,}835$, $u_{100} \approx 0{,}967$: convergence lente).

Réponse. (u_n) est croissante et converge vers 1.



f_2 (épaisse), f_1, f_5, f_{20} : les racines croissent vers 1

Correction de l'exercice 12 – Continuité et densité

a) Pour x réel, $r_n \in \mathbb{Q}$, $r_n \to x$ (densité). Par continuité :

$$f(x) = \lim f(r_n) = \lim g(r_n) = g(x)$$

b) Si $f(a) \neq f(b)$, disons $f(a) < f(b)$, le TVI fait prendre à f toutes les valeurs de $[f(a), f(b)]$, dont des non-entiers (par exemple $f(a) + \frac{1}{2}$) : absurde.

c) Oui : entre deux rationnels distincts il y a des irrationnels, que f prendrait par le TVI.

d) Oui, même argument : la valeur $\frac{1}{2}$ serait atteinte. C'est la **connexité** de l'intervalle.

Réponse. Continue et égales sur $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ égales ; continue à valeurs entières (ou rationnelles) sur un intervalle $\Rightarrow$ constante.

Correction de l'exercice 13 – Minoration strictement positive

a) Théorème des bornes : f atteint son minimum en x_0, et

$$m = f(x_0) > 0$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Non : $f(x) = x$ sur $]0, 1]$ est > 0 mais $\inf f = 0$; $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ aussi. Le segment est indispensable.

c) Appliquer a) à $g - f$, continue et > 0 : $g - f \geq \varepsilon$ avec $\varepsilon = \min(g - f) > 0$.

d) $0 < \frac{1}{f} \leq \frac{1}{m}$.

Réponse. Sur un segment, $f > 0$ continue $\Rightarrow f \geq m > 0$; faux hors segment.

Correction de l'exercice 14 – Valeurs moyennes atteintes

a) Soient $m = \min f$ et $M = \max f$ (théorème des bornes). La moyenne de trois valeurs de $[m, M]$ est dans $[m, M] = f([0, 1])$: elle est atteinte.

b) Même argument :

$$m = \sum \lambda_i m \leq \sum \lambda_i f(x_i) \leq \sum \lambda_i M = M$$

— et $[m, M]$ est l'image de f.

c) $\sqrt{g(0)g(1)}$ est entre $g(0)$ et $g(1)$ (moyenne géométrique entre les deux) : TVI.

d) Cas particulier de a) : la moyenne de trois vitesses est entre la vitesse minimale et la vitesse maximale, donc atteinte.

Réponse. Toute moyenne pondérée de valeurs d'une fonction continue sur un segment est une valeur de la fonction.

Correction de l'exercice 15 – Limite finie à l'infini et bornes

a) Il existe A avec $|f(x) - \ell| \leq 1$ pour $x \geq A$; sur $[0, A]$, f est bornée (segment). Donc f est bornée.

b) Prendre A tel que $f(x) < f(0)$ pour $x \geq A$ (possible car $\ell < f(0)$). Le maximum sur $[0, A]$ est $\geq f(0)$, et domine les valeurs au-delà de A : c'est le maximum global.

c) $x\mathrm{e}^{-x}$: max $\frac{1}{\mathrm{e}}$ atteint en 1, min 0 atteint en 0. $1 - \mathrm{e}^{-x}$: min 0 atteint en 0, sup 1 **non atteint**.

d) Si f est constante, c'est clair. Sinon il existe x_0 avec $f(x_0) \neq \ell$; si $f(x_0) > \ell$, l'argument de b) (des deux côtés) donne un maximum ; si $f(x_0) < \ell$, un minimum.

Réponse. Bornée ; maximum atteint si une valeur dépasse ℓ ; $1 - \mathrm{e}^{-x}$ n'atteint pas 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).