Plaquette 4 – Équations fonctionnelles, lipschitziennes, continuité uniforme

Limites et continuité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Continuité uniforme sur I :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in I,\quad |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

- k**-lipschitzienne** : $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$; lipschitzienne ⇒ uniformément continue ⇒ continue.
- **Heine** : continue sur un segment ⇒ uniformément continue.
- **Densité** : deux fonctions continues égales sur une partie dense de $\mathbb{R}$ sont égales.
- **Contraction** ($k<1$) d'un segment stable : $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.

Correction de l'exercice 1 – Équation de Cauchy additive

a) $x=y=0$: $f(0)=2f(0)$, donc $f(0)=0$. $y=-x$: $0=f(x)+f(-x)$.

b) Récurrence : $f(n+1)=f(n)+f(1)=an+a$. Pour $n<0$, $f(n)=-f(-n)=an$.

c) En additionnant q fois $\frac{p}{q}$:

$$q f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(q\cdot\frac{p}{q}\right) = f(p) = ap \quad\Longrightarrow\quad f\left(\frac{p}{q}\right) = a\frac{p}{q}$$

d) f et $x\mapsto ax$ sont continues et coïncident sur $\mathbb{Q}$, dense : elles sont égales. Réciproquement $x\mapsto ax$ convient.

Réponse. Les solutions continues sont les $x\mapsto ax$.

Correction de l'exercice 2 – Équations exponentielle et logarithmique

a) $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)^2\geq 0$. Si $f(x_0)=0$, alors pour tout x, $f(x)=f(x-x_0)f(x_0)=0$: exclu.

b) $f>0$, et $\ln f$ est continue et additive : $\ln f(x)=ax$, soit

$$f(x)=\mathrm{e}^{ax}$$

c) $h(s+t)=g(\mathrm{e}^s\mathrm{e}^t)=h(s)+h(t)$, h continue : $h(t)=at$, et $g(x)=h(\ln x)=a\ln x$.

d) $\ln f$ vérifie l'équation de c) : $\ln f = a\ln$, donc $f(x)=x^a$.

Réponse. $f(x+y)=f(x)f(y)$: e^{ax} (ou 0) ; $g(xy)=g(x)+g(y)$: $a\ln x$; $f(xy)=f(x)f(y)$: x^a.

Correction de l'exercice 3 – Les relations f(2x) = f(x) et f(x²) = f(x)

a) Par récurrence $f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)=\cdots=f\left(\frac{x}{2^n}\right)$; $\frac{x}{2^n}\to 0$ et f est continue en 0 :

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f(0)$$

b) $f(-x)=f(x^2)=f(x)$. Pour $x>0$, $f(y)=f(\sqrt{y})$ appliqué à $y=x$ plusieurs fois : $f(x)=f\left(x^{1/2^n}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Pour $x > 0$, $x^{1/2^n} = \mathrm{e}^{\ln x / 2^n} \to 1$: $f(x) = f(1)$. Par continuité en 0, $f(0) = f(1)$; par parité, f vaut $f(1)$ partout.

d) $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, 0 sinon : $2x$ est rationnel si et seulement si x l'est.

Réponse. Continue et vérifiant $f(2x) = f(x)$ ou $f(x^2) = f(x) \Rightarrow$ constante.

Correction de l'exercice 4 – Deux périodes incommensurables

a) Par récurrence, n et $n\sqrt{2}$ sont des périodes pour $n \in \mathbb{Z}$; une somme de périodes est une période.

b) Pour x réel, il existe $g_n \in G$ avec $g_n \to x$ (densité). Alors $f(g_n) = f(0 + g_n) = f(0)$ et par continuité :

$$f(x) = \lim f(g_n) = f(0)$$

c) Non : $\mathbb{Z} + \frac{3}{2}\mathbb{Z} = \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ n'est pas dense ; $x \mapsto \sin(4\pi x)$ admet 1 et $\frac{3}{2}$ pour périodes sans être constante.

d) G est stable par $x \mapsto x + 1$ et $x \mapsto x + \sqrt{2}$ (et par leurs inverses) : $x + 1 \in G \Leftrightarrow x \in G$. Donc $\mathbf{1}_G$ admet ces deux périodes, sans être constante ($\mathbf{1}_G(0) = 1$, $\mathbf{1}_G\left(\frac{1}{2}\right) = 0$) : la continuité est indispensable.

Réponse. Périodes 1 et $\sqrt{2}$ + continuité $\Rightarrow$ constante ; faux pour 1 et $\frac{3}{2}$, faux sans continuité.

Correction de l'exercice 5 – Racine carrée : continuité uniforme sans Lipschitz

a) Pour $x \geq y$: $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy} \leq x + y - 2y = x - y$, car $\sqrt{xy} \geq y$.

b) Avec $\eta = \varepsilon^2$:

$$|x - y| \leq \varepsilon^2 \quad \Longrightarrow \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \varepsilon$$

c) $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \to +\infty$ quand $x \to 0^+$: aucune constante k ne convient.

d) $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{|x - y|}{2}$ pour $x, y \geq 1$.

Réponse. $\sqrt{\cdot}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ ($\eta = \varepsilon^2$), non lipschitzienne près de 0.

Correction de l'exercice 6 – Réfuter la continuité uniforme

a) $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$ mais $x_n^2 - y_n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$: avec $\varepsilon = 1$, aucun η ne convient.

b) $x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$, $y_n = \frac{1}{2n\pi}$: $x_n - y_n \to 0$ et $|\sin\frac{1}{x_n} - \sin\frac{1}{y_n}| = 1$.

c) $x_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $y_n = \sqrt{2n\pi}$:

$$x_n - y_n = \frac{\pi/2}{x_n + y_n} \to 0, \qquad \sin x_n^2 - \sin y_n^2 = 1$$

d) $g(x) = x\sin\frac{1}{x}$, $g(0) = 0$ est continue sur $[0, 1]$ ($|g(x)| \leq x$), donc uniformément continue (Heine), et a fortiori sa restriction à $]0, 1]$.

Réponse. Deux suites $x_n - y_n \to 0$ avec $|f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0$ réfutent la continuité uniforme.

Correction de l'exercice 7 – Uniformément continue ⇒ limite au bord

a) Soit $\varepsilon > 0$ et η associé. (x_n) converge, donc est de Cauchy : pour $p, q \geq N$, $|x_p - x_q| \leq \eta$,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d'où

$$|f(x_p) - f(x_q)| \leq \varepsilon$$

— $(f(x_n))$ est de Cauchy, donc converge dans $\mathbb{R}$.

b) Si $x_n \to 0$ et $y_n \to 0$, la suite $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots$ tend vers 0 : son image converge, et ses deux sous-suites ont la même limite.

c) Caractérisation séquentielle : $f(x) \to \ell$ quand $x \to 0^+$; on pose $f(0) = \ell$.

d) $\sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 ; $\frac{1}{x} \to +\infty$ n'a pas de limite finie : aucune des deux n'est uniformément continue.

Réponse. Uniformément continue sur $]0, 1] \Rightarrow$ prolongeable par continuité en 0.

Correction de l'exercice 8 – Itérations contractantes

a) Sur $[0, 1]$, $\cos x \in [\cos 1, 1] \subset [0, 1]$. Par les accroissements finis, $|\cos x - \cos y| \leq \sup|\sin| \cdot |x - y| = \sin 1 \cdot |x - y|$, avec $\sin 1 \approx 0{,}841$.

b) $|u_{n+1} - \alpha| = |\cos u_n - \cos\alpha| \leq k|u_n - \alpha|$, d'où par récurrence

$$|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha| \leq k^n$$

c) $k^n \leq 10^{-6} \Leftrightarrow n \geq \frac{6\ln 10}{-\ln\sin 1} \approx 80{,}04$: $n = 81$ suffit.

d) La garantie de la dichotomie divise l'erreur par 2 à chaque étape ; ici par $\frac{1}{0{,}841} \approx 1{,}19$ seulement. En pratique la convergence est plus rapide (le vrai facteur est $|\sin\alpha| \approx 0{,}674$), mais la borne est pessimiste.

Réponse. $|u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n$; 81 itérations garantissent 10^{-6}.

Correction de l'exercice 9 – Involutions continues

a) $f \circ f = \mathrm{id}$: f est injective et surjective. Continue et injective sur un intervalle : strictement monotone.

b) f croissante et $f(x) > x$: en appliquant f, $f(f(x)) \geq f(x)$, soit $x \geq f(x)$, contradiction. De même $f(x) < x$ est impossible. Donc

$$f(x) = x \quad \text{pour tout } x$$

c) $a - (a - x) = x$. Il en existe d'autres : il suffit d'une courbe décroissante symétrique par rapport à la droite $y = x$. Par exemple $f(x) = -x^3$ pour $x \geq 0$ et $f(x) = \sqrt[3]{-x}$ pour $x < 0$: pour $x \geq 0$, $f(f(x)) = \sqrt[3]{x^3} = x$; pour $x < 0$, $f(f(x)) = -(\sqrt[3]{-x})^3 = x$.

d) $x \mapsto f(x) - x$ est continue, strictement décroissante, de limites $+\infty$ et $-\infty$: un unique zéro.

Réponse. Involution continue : id si croissante ; sinon décroissante, avec un unique point fixe.

Correction de l'exercice 10 – Équation de Jensen

a) Les constantes se simplifient : $g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2}$, et $g(0) = 0$.

b) $y = 0$: $g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{g(x)+g(0)}{2} = \frac{g(x)}{2}$.

c)

$$g(x+y) = 2g\left(\frac{x+y}{2}\right) = g(x) + g(y)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) g est continue et additive : $g(x) = ax$ (équation de Cauchy). Donc $f(x) = ax + b$ avec $b = f(0)$, et ces fonctions conviennent.

Réponse. Les solutions continues sont les fonctions affines.

Correction de l'exercice 11 – Fonctions dilatantes

a) $f(x) = f(y)$ entraîne $|x - y| \leq 0$. Injective et continue sur $\mathbb{R}$: strictement monotone.

b) Pour $x \geq 0$: $f(x) - f(0) = |f(x) - f(0)| \geq x$ (croissante). Idem pour $x \leq 0$.

c) Les limites en $\pm\infty$ sont $\pm\infty$: par le TVI, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$; bijection.

d) Avec $x = f^{-1}(u)$, $y = f^{-1}(v)$:

$$|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)| = |x - y| \leq |f(x) - f(y)| = |u - v|$$

Réponse. Continue dilatante ⇒ bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de réciproque 1-lipschitzienne.

Correction de l'exercice 12 – Limites en l'infini et continuité uniforme

a) $|f(x) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $x \geq A$; inégalité triangulaire.

b) f est uniformément continue sur $[0, A + 1]$: il existe η_1 associé à ε.

c) $\eta = \min(\eta_1, 1)$. Si $|x - y| \leq \eta$: ou bien $x, y \in [0, A + 1]$, ou bien les deux sont $\geq A$ (l'un est $> A + 1$, l'autre à distance ≤ 1). Dans les deux cas

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

d) $\left|\frac{\sin x^2}{1 + x}\right| \leq \frac{1}{1 + x} \to 0$: limite 0, donc c) s'applique. Le facteur $\frac{1}{1 + x}$ écrase les oscillations.

Réponse. Continue avec limite finie en $+\infty$ ⇒ uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Correction de l'exercice 13 – L'équation 2f(2x) = f(x) + x

a) $4cx = cx + x$: $c = \frac{1}{3}$.

b) $2g(2x) = 2f(2x) - \frac{4x}{3} = f(x) + x - \frac{4x}{3} = g(x)$. Puis, en appliquant à $\frac{x}{2}$: $g(x) = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{2}\right)$, et par récurrence

$$g(x) = \frac{1}{2^n}g\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

c) g est continue en 0, donc bornée au voisinage : $g\left(\frac{x}{2^n}\right) \to g(0)$ et le facteur $\frac{1}{2^n} \to 0$: $g(x) = 0$. Donc $f(x) = \frac{x}{3}$.

d) $2 \cdot \frac{1}{2x} = \frac{1}{x}$ ✓ : $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{x}$ est une solution discontinue en 0.

Réponse. L'unique solution continue est $f(x) = \frac{x}{3}$.

Correction de l'exercice 14 – Fonctions lipschitziennes : opérations

a) $|(f + g)(x) - (f + g)(y)| \leq (k + k')|x - y|$; $|f(g(x)) - f(g(y))| \leq k|g(x) - g(y)| \leq kk'|x - y|$.

b) Non : x^2 n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ ($\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$ non borné).

c) Si $|f| \leq M$, $|g| \leq M'$:

$$|fg(x) - fg(y)| \leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \leq (Mk' + M'k)|x - y|$$

d) $||x| - |y|| \leq |x - y|$; $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ (accroissements finis) ; pour $n \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{dist}(x, \mathbb{Z}) \leq |x - n| \leq |x - y| + |y - n|$, puis on prend l'inf sur n.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Sommes et composées : lipschitziennes ; produit : oui si les fonctions sont bornées.

Correction de l'exercice 15 – Point fixe d'une fonction décroissante

a) $h(x) = f(x) - x$: $h(0) = f(0) \geq 0$, $h(1) = f(1) - 1 \leq 0$, TVI.

b) h est strictement décroissante (somme d'une décroissante et de $-x$) : au plus un zéro.

c) $u_1 = f(0) \geq 0 = u_0$ et par récurrence (f croissante) (u_n) est croissante, majorée par 1 : $u_n \to \ell$ et $f(\ell) = \ell$ (continuité). Si c est un point fixe, $u_0 \leq c$ entraîne $u_n \leq c$ par récurrence, d'où $\ell \leq c$: c'est le plus petit.

d) Un point fixe de f en est un de $f \circ f$. Réciproquement, si f n'a pas de point fixe, $f(x) - x$ ne s'annule pas et garde un signe, disons $f(x) > x$ partout ; alors

$$f(f(x)) > f(x) > x$$

— et $f \circ f$ n'a pas de point fixe.

Réponse. Point fixe par le TVI, unique si f décroissante ; $f \circ f$ et f ont des points fixes simultanément.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).