Plaquette 1 – Calculs de limites, théorèmes de comparaison et TVI

Limites et continuité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions et théorèmes du cours.

— **Définition** : $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x,\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$$

— **Opérations** : somme, produit, quotient des limites, sous réserve d'éviter les **formes indéterminées** : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞.

— **Théorème d'encadrement (« gendarmes »)** : si $u \le f \le v$ au voisinage de a et si $u, v \to \ell$, alors $f \to \ell$.

— **Comparaison** : si $f \ge u$ et $u \to +\infty$, alors $f \to +\infty$.

— **Composition** : si $f \to b$ en a et $g \to \ell$ en b, alors $g \circ f \to \ell$ en a.

— **Continuité en** a : f est définie en a et $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

— **Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)** : si f est continue sur $[a\,;b]$ et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = k$.

— **Corollaire (bijection)** : si de plus f est **strictement monotone**, ce c est **unique**.

— **Théorème des bornes** : une fonction continue sur un **segment** $[a\,;b]$ est bornée et atteint ses bornes.

— **Prolongement par continuité** : si f n'est pas définie en a mais que $f(x) \to \ell$, on pose $\widetilde{f}(a) = \ell$.

Correction de l'exercice 1 – Limites d'un quotient de polynômes

En $+\infty$, on factorise par le **terme dominant** du numérateur et du dénominateur.

a) $\dfrac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + 5} = \dfrac{x^2\left(3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2 + \frac{5}{x^2}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{3}{2}$.

b) $\dfrac{x^2+1}{x^3-2} = \dfrac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x^3}\right)} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^3}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

— **Règle** : pour un quotient de polynômes en $\pm\infty$, seules comptent les puissances dominantes.

Réponse. a) $\frac{3}{2}$ · b) 0.

Correction de l'exercice 2 – Quantité conjuguée

Il s'agit d'une forme indéterminée $\infty - \infty$: on multiplie par la **quantité conjuguée**.

$$\sqrt{x^2+x} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+x} + x\right)}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x}$$

— On factorise par x au dénominateur (avec $x > 0$, donc $\sqrt{x^2} = x$) :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$= \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

— **Contrôle numérique** : pour $x = 1\,000$, $\sqrt{1\,001\,000} - 1\,000 \approx 0{,}49988$. Cohérent.

Réponse. $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3 – Forme 0/0

En $x = 2$, numérateur et dénominateur s'annulent : forme $\frac{0}{0}$. On **factorise**.

— Numérateur : $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.
— Dénominateur : $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ (racines évidentes 1 et 2).
— Pour $x \neq 2$:

$$\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+2}{x-1} \xrightarrow[x\to 2]{} \frac{4}{1} = 4$$

— **Principe** : une forme $\frac{0}{0}$ en a signale un facteur commun $(x-a)$ à simplifier.

Réponse. 4.

Correction de l'exercice 4 – Taux de variation

Forme $\frac{0}{0}$. On fait apparaître **deux taux de variation connus**.

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\sin x} = \frac{\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}}{\frac{\sin x}{x}} \qquad (x \neq 0)$$

— Or $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \to 1$ et $\frac{\sin x}{x} \to 1$ (limites de référence, ce sont les nombres dérivés en 0).
— Le quotient tend donc vers $\frac{1}{1} = 1$.
— **Méthode générale** : dans une forme $\frac{0}{0}$ en 0, on divise numérateur et dénominateur par x pour retrouver des taux de variation.

Réponse. 1.

Correction de l'exercice 5 – Théorème des gendarmes

Première limite. Pour tout $x > 0$: $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

— Les deux bornes tendent vers 0 : par le **théorème d'encadrement**, $\frac{\sin x}{x} \to 0$.

Seconde limite. Pour $x \neq 0$: $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$, donc $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|$.

— Comme $|x| \to 0$, l'encadrement donne $x\sin\frac{1}{x} \to 0$.
— **Remarque** : $\sin\frac{1}{x}$ n'a **pas** de limite en 0 (elle oscille), mais le facteur x « écrase » ces oscillations.

Réponse. Les deux limites valent 0.

Correction de l'exercice 6 – Comparaison

On minore par une expression dont la limite est connue.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Pour tout x : $\cos x \geq -1$, donc $x + \cos x \geq x - 1$.
— Or $x - 1 \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.
— D'après le **théorème de comparaison**, $x + \cos x \to +\infty$.
— **Erreur à éviter** : on ne peut pas écrire « $\lim(x + \cos x) = +\infty + \lim \cos x$ », puisque $\cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$. C'est précisément pourquoi on minore.

Réponse. Minoration par $x - 1 \to +\infty$.

Correction de l'exercice 7 – Continuité et prolongement

— a) **Non** : le dénominateur s'annule en 1, la fonction n'est pas définie en ce point.
— b) Pour $x \neq 1$: $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$.
— Donc $f(x) \to 2$ quand $x \to 1$: la limite existe et est **finie**.
— On peut donc prolonger f par continuité en posant $\widetilde{f}(1) = 2$; la fonction prolongée est $x \mapsto x + 1$, continue sur $\mathbb{R}$.
— **Vocabulaire** : on parle de « faux problème » ou de singularité **artificielle**.

Réponse. a) non · b) oui, en posant $f(1) = 2$.

Correction de l'exercice 8 – Continuité d'une fonction définie par morceaux

Sur chaque morceau, f est polynomiale donc continue ; le seul point à examiner est $x = 2$.

— **Limite à gauche** : $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2^2 + 1 = 5$, qui est aussi $f(2)$.
— **Limite à droite** : $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2a - 1$.
— La continuité en 2 impose l'égalité des deux : $2a - 1 = 5$, donc $a = 3$.
— Vérification : avec $a = 3$, la seconde branche vaut $3x - 1$, et en 2 elle donne 5. La fonction est bien continue.

Réponse. $a = 3$.

Correction de l'exercice 9 – Théorème des valeurs intermédiaires

a) f est **continue** sur $[0\,;1]$ (fonction polynomiale).

— $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$: 0 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$.
— D'après le **TVI**, il existe $c \in]0\,;1[$ tel que $f(c) = 0$.

b) $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ pour tout x : f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

— Une fonction strictement monotone prend chaque valeur **au plus une fois** : la solution est donc unique.
— Estimation : $f(0{,}6) = 0{,}216 + 0{,}6 - 1 = -0{,}184 < 0$ et $f(0{,}7) = 0{,}343 + 0{,}7 - 1 = 0{,}043 > 0$, donc $c \in]0{,}6\,;0{,}7[$.

Réponse. a) TVI avec $f(0) < 0 < f(1)$ · b) unicité par stricte croissance ; $c \approx 0{,}68$.

Correction de l'exercice 10 – TVI sur un intervalle non borné

On étudie $g(x) = \mathrm{e}^x + x - 3$, continue sur $\mathbb{R}$.

— $g'(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0$: g est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
— Limites : $g(x) \to -\infty$ en $-\infty$ (car $\mathrm{e}^x \to 0$ et $x \to -\infty$) et $g(x) \to +\infty$ en $+\infty$.
— D'après le **corollaire du TVI** (strictement monotone continue), g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$: l'équation $g(x) = 0$ a une **unique** solution.
— Localisation : $g(0) = 1 + 0 - 3 = -2 < 0$ et $g(1) = \mathrm{e} - 2 \approx 0{,}718 > 0$, donc la solution est dans $]0\,;1[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Unique solution dans $]0\,;1[$ (bijection stricte de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$).

Correction de l'exercice 11 – Théorème des bornes

— a) f est **bornée** sur $[0\,;1]$ et **atteint ses bornes** : il existe x_1, x_2 dans $[0\,;1]$ tels que $f(x_1) = \min f$ et $f(x_2) = \max f$.
— b) **Non** : le caractère **fermé et borné** du segment est essentiel.
— Contre-exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0\,;1[$ mais n'y est pas bornée (elle tend vers $+\infty$ en 0^+).
— Autre contre-exemple : $f(x) = x$ sur $]0\,;1[$ est bornée mais n'atteint **ni** son infimum 0 **ni** son supremum 1.

Réponse. a) bornée et atteint ses bornes · b) non : $\frac{1}{x}$ sur $]0\,;1[$.

Correction de l'exercice 12 – Composition de limites

Première limite. On pose $u = \dfrac{1}{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$.

— Comme $\sin u \to 0$ quand $u \to 0$ (continuité de sin en 0), on obtient $\sin \dfrac{1}{x} \to 0$.

Seconde limite. On pose $u = -\dfrac{1}{x}$: quand $x \to 0^+$, $\dfrac{1}{x} \to +\infty$ donc $u \to -\infty$.

— Or $\mathrm{e}^u \to 0$ quand $u \to -\infty$, donc $\mathrm{e}^{-1/x} \to 0$.
— **Attention** : en 0^-, on aurait $u \to +\infty$ et la limite serait $+\infty$. Les limites à droite et à gauche diffèrent.

Réponse. 0 dans les deux cas.

Correction de l'exercice 13 – Caractérisation séquentielle et absence de limite

a) Sens direct par composition des limites ; la réciproque se prouve par contraposée (si $f \not\to \ell$, on construit une suite $x_n \to a$ avec $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon$).

b) $\cos \frac{1}{x_n} = \cos(2n\pi) = 1$ et $\cos \frac{1}{y_n} = \cos((2n+1)\pi) = -1$: deux suites tendant vers 0 donnent deux limites différentes, donc pas de limite.

c) $\left|x \cos \frac{1}{x}\right| \le |x|$, encadrement :

$$-|x| \le x \cos \frac{1}{x} \le |x| \quad \Longrightarrow \quad x \cos \frac{1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

d) Non : en tout point a, une suite de rationnels et une suite d'irrationnels tendant vers a (densité) donnent les limites 1 et 0.

Réponse. $\cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 (suites $\frac{1}{2n\pi}$ et $\frac{1}{(2n+1)\pi}$) ; $x \cos \frac{1}{x} \to 0$; $1_{\mathbb{Q}}$ n'a de limite nulle part.

Correction de l'exercice 14 – Théorème du point fixe par le TVI

a) $g(0) = f(0) \ge 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \le 0$ car f est à valeurs dans $[0, 1]$.

b) g est continue sur $[0, 1]$ et change de signe : par le TVI, il existe c avec $g(c) = 0$, soit

$$f(c) = c$$

c) Si f est décroissante, g est **strictement** décroissante (somme d'une fonction décroissante et de $-x$ strictement décroissante) : au plus un zéro.

d) cos est continue, décroissante sur $[0, 1]$, et $\cos([0, 1]) = [\cos 1, 1] \subset [0, 1]$: un unique

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

point fixe ($\approx 0{,}739$).

Réponse. TVI sur $f(x) - x$: point fixe ; unique si f décroissante ; $\cos x = x$ a une unique solution dans $[0, 1]$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : étude complète

a) Le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

— Le numérateur se factorise : $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ (racines 1 et 2).

— Donc pour $x \neq 1$: $f(x) = x - 2$.

b) $f(x) \to 1 - 2 = -1$ quand $x \to 1$: on prolonge en posant $f(1) = -1$.

— La fonction prolongée est l'application affine $x \mapsto x - 2$, continue sur $\mathbb{R}$.

c) Comme $f(x) = x - 2$ hors de 1 :

— $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

— **Leçon** : simplifier **avant** de calculer évite tout calcul de forme indéterminée.

Réponse. a) $f(x) = x - 2$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ · b) oui, $f(1) = -1$ · c) $\pm\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).