Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : limites et continuité

Limites et continuité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Fonction auxiliaire : pour montrer $f(c) = g(c)$, appliquer le TVI à

$$h = f - g \quad \text{continue}, \quad h(a)h(b) \leq 0$$

— **Suites récurrentes** : si $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_n \to \ell$ et f continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

— **Fonction monotone** : limites à gauche et à droite en tout point intérieur, $f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+)$.

— **Césaro continu** : $f(x+1) - f(x) \to \ell \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \to \ell$ (si f est bornée sur les segments).

— **Maximum** : $\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$.

Correction de l'exercice 1 – Le randonneur

a) $m(8) = 0$, $m(18) = L$, $d(8) = L$, $d(18) = 0$.

b) $h = m - d$ est continue sur $[8, 18]$ avec $h(8) = -L < 0$ et $h(18) = L > 0$: le TVI donne t avec $m(t) = d(t)$.

c) Non en général : s'il fait des allers-retours, h peut s'annuler plusieurs fois. Si m est croissante et d décroissante strictement, h est strictement croissante : heure unique.

d) Avec $s = \frac{t-8}{10}$: $s = 1 - s^2$, soit $s^2 + s - 1 = 0$,

$$s = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618 \quad \Longrightarrow \quad t \approx 14{,}18$$

— soit vers 14 h 11.

Réponse. Il existe une heure où il est au même point (TVI sur $m - d$) ; ici vers 14 h 11.

Correction de l'exercice 2 – Températures antipodales

a) $g(\theta + \pi) = T(\theta + 2\pi) - T(\theta + \pi) = T(\theta) - T(\theta + \pi) = -g(\theta)$.

b) $g(0)$ et $g(\pi) = -g(0)$ sont de signes contraires : le TVI sur $[0, \pi]$ donne θ_0 avec $T(\theta_0 + \pi) = T(\theta_0)$.

c) $g(\theta) = -10\cos\theta$ (le terme $3\sin 2\theta$ est π-périodique) : $g = 0$ pour $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. Vérification :

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = 20 + 0 + 0 = 20 = T\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

d) Non : $\cos\theta = \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$ est impossible (ces trois valeurs sont de somme nulle, elles seraient toutes nulles, or deux cosinus d'angles à 120° ne sont jamais nuls simultanément).

Réponse. Toujours deux points antipodaux de même température ; pas d'analogue à trois points.

Correction de l'exercice 3 – Le coureur et la corde universelle

a) $g(0) + g(25) = x(50) - x(0) - 10 = 0$: $g(0)$ et $g(25)$ de signes contraires, TVI.

b) $g(t) = x(t+10) - x(t) - 2$ sur $[0, 40]$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$g(0)+g(10)+g(20)+g(30)+g(40)=x(50)-x(0)-10=0$$

— deux termes sont de signes contraires : TVI.

c) La somme télescopique demande de découper $[0,50]$ en un nombre **entier** d'intervalles de 20 min : $\frac{50}{20}=2{,}5$ n'est pas entier. Ici $\sin^2\frac{50\pi}{20}=\sin^2\frac{5\pi}{2}=1$, d'où $f(50)=0$, et $\sin^2$ est π-périodique : $f(t+20)-f(t)=-\frac{20}{50}=-0{,}4\neq 0$. Une telle fonction n'a **aucune** corde horizontale de longueur 20.

d) Pour $\frac{\tau}{50}=\frac{1}{n}$, n entier (théorème de la corde universelle) : 25, 10, 5 min… et seulement celles-là.

Réponse. Garanti pour une fraction $\frac{1}{n}$ du parcours (25 min / 5 km, 10 min / 2 km), pas pour $\frac{2}{5}$.

Correction de l'exercice 4 – Racines de tan x = x

a) $h(x)=\tan x-x$, $h'(x)=\tan^2 x\geq 0$, nul seulement en des points isolés : h strictement croissante sur I_n, de limites $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes. Unique zéro (bijection).

b) $h(n\pi)=-n\pi<0$: le zéro est à droite de $n\pi$.

c) $\tan(x_n-n\pi)=\tan x_n=x_n$ et $x_n-n\pi\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$:

$$x_n-n\pi=\arctan x_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}$$

— car $x_n\geq n\pi\to+\infty$.

d) Dichotomie sur $\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$: $x_1\approx 4{,}4934$ ($x_1-\pi\approx 1{,}352$, déjà proche de $\frac{\pi}{2}\approx 1{,}571$).

Réponse. $x_n\in\left]n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2}\right[$, $x_n-n\pi\to\frac{\pi}{2}$; $x_1\approx 4{,}4934$.

Correction de l'exercice 5 – Limite d'une suite récurrente

a) Récurrence : si $0\leq u_n\leq 2$, $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}\in[\sqrt{2},2]$. Croissance : $u_1=\sqrt{2}>u_0$ et $x\mapsto\sqrt{2+x}$ croissante propage $u_n\leq u_{n+1}$.

b) Croissante majorée : $u_n\to\ell\in[0,2]$. Par continuité, $\ell=\sqrt{2+\ell}$, $\ell^2-\ell-2=0$, $\ell=2$ ($\ell\geq 0$).

c)

$$|u_{n+1}-2|=\frac{|u_n-2|}{\sqrt{2+u_n}+2}\leq\frac{|u_n-2|}{2}\quad\Longrightarrow\quad|u_n-2|\leq\frac{2}{2^n}$$

d) $f(x)=\frac{x}{2}$ pour $x>0$ et $f(0)=1$: avec $u_0=1$, $u_n=\frac{1}{2^n}\to 0$ mais $f(0)=1\neq 0$.

Réponse. $u_n\to 2$ avec $|u_n-2|\leq 2^{1-n}$; sans continuité, la limite peut ne pas être un point fixe.

Correction de l'exercice 6 – Discontinuités d'une fonction monotone

a) $\{f(x),x<a\}$ est majoré par $f(a)$: sa borne supérieure est la limite à gauche (monotonie). Idem à droite avec l'inf.

b) Si les deux limites sont égales, elles valent $f(a)$ (encadrement) : continue. Réciproque immédiate.

c) Si $a<b$ sont deux discontinuités, pour $a<x<b$:

$$f(a^+)\leq f(x)\leq f(b^-)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— les intervalles $]f(a^-), f(a^+)[$ et $\left]f(b^-), f(b^+)\right[$ sont disjoints, donc $r(a) \neq r(b)$.

d) L'ensemble des discontinuités s'injecte dans $\mathbb{Q}$, dénombrable. Exemple extrême : $f(x) = \sum_{r_n < x} 2^{-n}$ (une énumération (r_n) de $\mathbb{Q}$) est discontinue en chaque rationnel.

Réponse. Une fonction monotone a des limites latérales partout et au plus une infinité dénombrable de discontinuités.

Correction de l'exercice 7 – Césaro pour les fonctions

a) Somme télescopique de n termes, chacun à ε près de ℓ :

$$f(x) - f(A+t) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(A+t+k+1) - f(A+t+k))$$

b) $\frac{f(x)}{x} - \ell = \frac{f(A+t)}{x} + \frac{n\ell - x\ell}{x} + \frac{f(x) - f(A+t) - n\ell}{x}$, donc

$$\left|\frac{f(x)}{x} - \ell\right| \leq \frac{M}{x} + \frac{(A+1)|\ell|}{x} + \frac{n}{x}\varepsilon$$

— avec $\frac{n}{x} \leq 1$: pour x assez grand, les deux premiers termes sont $\leq \varepsilon$.

c) C'est la définition de la limite.

d) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \to 0$: $\frac{\sqrt{x}}{x} \to 0$ ✓. $f(x+1) - f(x) = 1$: $\frac{x + \sin 2\pi x}{x} \to 1$ ✓.
$(x+1)\ln(x+1) - x\ln x \to +\infty$: le théorème ne s'applique pas (ℓ infini ; la version infinie donne bien $\frac{f(x)}{x} = \ln x \to +\infty$).

Réponse. $f(x+1) - f(x) \to \ell \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \to \ell$.

Correction de l'exercice 8 – Aucune fonction continue ne prend chaque valeur deux fois

a) f prend déjà c en a et b : elle ne vaut pas c sur $]a, b[$, et par le TVI garde un signe constant.

b) Comme $f(a) = f(b) = c < M$, d et d' sont dans $]a, b[$; disons $d < d'$. Si $f = M$ sur $[d, d']$, M est pris une infinité de fois. Sinon f atteint sur $[d, d']$ un minimum $m' < M$ en un point $t_0 \in]d, d'[$. Pour $y \in]\max(m', c), M[$, le TVI donne un antécédent dans chacun des intervalles $]a, d[$, $]d, t_0[$, $]t_0, d'[$, $]d', b[$: au moins **quatre**, contradiction.

c) Pour $y \in]c, M[$: un antécédent dans $]a, d[$, un dans $]d, b[$, et un dans $]b, e[$ car

$$f(b) = c < y < M = f(e)$$

— trois antécédents : contradiction.

d) Aucune fonction continue ne prend chaque valeur exactement deux fois. En revanche, il existe des fonctions continues prenant chaque valeur exactement trois fois (construction classique « en zigzag », admise ici) : l'obstruction est propre au nombre pair 2.

Réponse. Impossible pour « exactement deux fois » ; possible pour trois.

Correction de l'exercice 9 – Maximum de deux fonctions continues

a) Si $a \geq b$: $\frac{a+b+a-b}{2} = a$. Symétrique sinon. Idem pour le min.

b) Sommes, valeurs absolues et produits par une constante de fonctions continues sont continus.

c) $f^+ = \max(f, 0)$, et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$f = f^+ - f^-, \qquad |f| = f^+ + f^-$$

d) Continue par b). Le minimum est atteint quand $\sin x = \cos x$ avec les deux négatifs : $x = \frac{5\pi}{4}$, valeur $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. En effet, pour tout x,
$\max(\sin x, \cos x) \geq \frac{\sin x + \cos x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$, avec égalité en $\frac{5\pi}{4}$.

Réponse. $\max(f, g)$ est continue ; $\min_{[0,\,2\pi]} \max(\sin, \cos) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\frac{5\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 10 – Limite simple de fonctions continues

a) $x < 1$: $x^n \to 0$, $f(x) = 0$. $x = 1$: $f_n(1) = \frac{1}{2}$. $x > 1$: $f_n(x) = \frac{1}{1 + x^{-n}} \to 1$.

b) f saute en 1 $(0, \frac{1}{2}, 1)$: **une limite simple de fonctions continues n'est pas forcément continue**.

c) $\frac{0{,}9^n}{1 + 0{,}9^n} \leq 10^{-3}$ dès que $0{,}9^n \leq \frac{10^{-3}}{1 - 10^{-3}}$, soit

$$n \geq \frac{\ln(999)}{-\ln 0{,}9} \approx 65{,}5 \quad \Longrightarrow \quad n \geq 66$$

d) f_n est croissante et $f_n(x) \to \frac{1}{2}$ quand $x \to 1^-$: le sup sur $[0, 1[$ vaut $\frac{1}{2}$, non atteint, quel que soit n.

Réponse. Limite $0, \frac{1}{2}, 1$: discontinue en 1 ; $n \geq 66$ pour $x = 0{,}9$.

Correction de l'exercice 11 – Refroidissement et limites

a) $60\,\mathrm{e}^{-10k} = 30$: $k = \frac{\ln 2}{10} \approx 0{,}0693$. Limite 20 °C (température ambiante).

b) T est continue strictement décroissante de 80 vers 20 : bijection. $\mathrm{e}^{-kt} = \frac{1}{3}$:

$$t = \frac{\ln 3}{k} = \frac{10 \ln 3}{\ln 2} \approx 15{,}85 \text{ min}$$

c) $\frac{60(\mathrm{e}^{-kt} - 1)}{t} \to -60k \approx -4{,}16$ °C par minute.

d) $T([0, +\infty[)$ est un intervalle contenant 80, et des valeurs aussi proches de 20 qu'on veut : il contient $]20, 80]$.

Réponse. $k = \frac{\ln 2}{10}$; 40 °C à $t \approx 15{,}85$ min ; vitesse initiale $\approx -4{,}16$ °C/min.

Correction de l'exercice 12 – Nombre d'étapes de dichotomie

a) $x^3 - 2$ est continue strictement croissante, $-1 < 0 < 6$: TVI + monotonie.

b) $1{,}5^3 = 3{,}375 > 2$: $[1; 1{,}5]$; $1{,}25^3 \approx 1{,}953 < 2$: $[1{,}25; 1{,}5]$; $1{,}375^3 \approx 2{,}600$: $[1{,}25; 1{,}375]$; $1{,}3125^3 \approx 2{,}261$: $[1{,}25; 1{,}3125]$. (Valeur : $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599$.)

c) $2^{-n} \leq 10^{-p} \Leftrightarrow n \geq p\frac{\ln 10}{\ln 2} \approx 3{,}32p$:

$$p = 6 : n = 20, \qquad p = 12 : n = 40$$

d) $\log_{10} 2 \approx 0{,}30$ chiffre par étape : environ un chiffre toutes les 3,3 étapes.

Réponse. $\sqrt[3]{2} \in [1{,}25; 1{,}3125]$ après 4 étapes ; 20 étapes pour 10^{-6}, 40 pour 10^{-12}.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – Prolongement et étude d'une fonction

a) En 0 : $x\ln x \to 0$ et $x-1 \to -1$: $f \to 0$. En 1 : $\frac{\ln x}{x-1} \to 1$ (taux d'accroissement de ln en 1), donc $f \to 1$. Prolongements : $f(0)=0$, $f(1)=1$.

b) $f(x) = \frac{x}{x-1}\ln x \to +\infty$ et $\frac{f(x)}{\ln x} = \frac{x}{x-1} \to 1$.

c) $\ln x$ et $x-1$ ont le même signe : $f \geq 0$.

d) Pour $x > 1$:

$$f(x) = \frac{x\ln x}{x-1} \leq \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$$

Réponse. Prolongement $f(0)=0$, $f(1)=1$; $f \sim \ln x$ en $+\infty$; $0 \leq f(x) \leq \frac{x+1}{2}$ pour $x > 1$.

Correction de l'exercice 14 – Fonction continue et suites denses

a) f est continue en t : il existe η avec $|f(s)-f(t)| \leq \varepsilon$ si $|s-t| \leq \eta$. Par densité, il existe n avec $|\{n\sqrt{2}\}-t| \leq \eta$, et $f(n\sqrt{2}) = f(\{n\sqrt{2}\})$ par périodicité.

b) Si $f(n\sqrt{2}) \to 0$ mais $f(t) = y \neq 0$: a) fournit une infinité de n avec $|f(n\sqrt{2})-y| \leq \frac{|y|}{2}$ (on refait l'argument avec des n de plus en plus grands), donc $|f(n\sqrt{2})| \geq \frac{|y|}{2}$ infiniment souvent : contradiction.

c) Avec $g(u) = \sin(2\pi u)$, 1-périodique : $\sin n = g\left(\frac{n}{2\pi}\right)$ approche toute valeur de $[-1,1]$, en particulier 1 et -1 infiniment souvent :

$$\sin n \text{ n'a pas de limite}$$

d) $\sin(n\pi) = 0$ pour tout n : limite 0 (ici $\frac{n\pi}{2\pi} = \frac{n}{2}$ ne prend que deux parties fractionnaires).

Réponse. Densité + continuité : $\sin n$ n'a pas de limite, alors que $\sin(n\pi) = 0$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : une fonction définie par une limite

a) $|x| < 1$: $x^{2n} \to 0$, $f(x) = -1$. $|x| = 1$: $f(x) = 0$. $|x| > 1$: $f(x) = \frac{1-x^{-2n}}{1+x^{-2n}} \to 1$.

b) f est discontinue en ± 1 (sauts de -1 à 1). g : en 1, limites -1 à gauche, 1 à droite : discontinue ; idem en -1.

c) En ± 1, les limites de h sont $\mp(1-a)$ et $(1-a)$: il faut

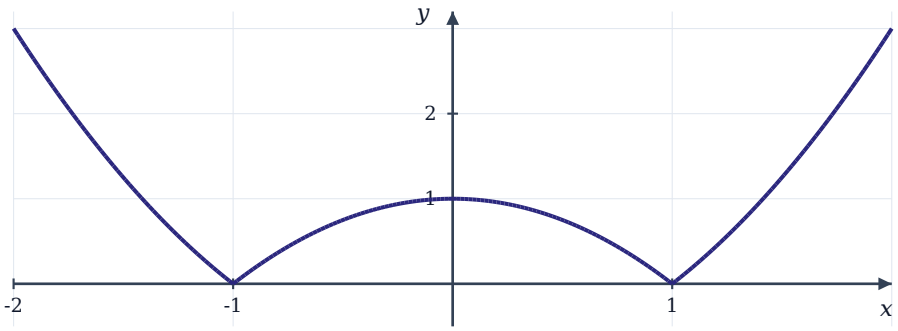
$$1-a = -(1-a) \iff a = 1$$

— et alors $h(\pm 1) = 0$ = les limites : $h(x) = |x^2-1|$, continue.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) $h = |x^2 - 1| \geq 0$, nulle en ± 1 : minimum 0 atteint (la courbe est en forme de « W »).

Réponse. f vaut -1, 0, 1 ; $h = (x^2 - 1)f(x) = |x^2 - 1|$ est continue pour $a = 1$.



La courbe de $h(x) = |x^2 - 1|$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).