Plaquette 2 – Calculs de limites : formes indéterminées

Limites et continuité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Face à une forme indéterminée, on identifie le **terme dominant** (factorisation, croissances comparées), on transforme l'expression (quantité conjuguée, passage à l'exponentielle pour u^v, changement de variable $X = \frac{1}{x}$), et l'on se ramène aux **limites de référence** ($\frac{\sin x}{x}$, $\frac{e^x - 1}{x}$, $\frac{\ln(1+x)}{x}$, $\frac{1-\cos x}{x^2}$). Quand cela ne suffit pas, on **encadre** à l'aide d'inégalités usuelles. Chaque résultat se contrôle par une valeur numérique proche.

Exercice 1 – Formes 1^∞

Calculer les limites suivantes en 0^+ :

a) $(1+\sin x)^{1/x}$.

b) $(\cos x)^{1/x^2}$.

c) $\left(1+x^2\right)^{1/x}$.

d) Contrôler a) et b) numériquement ($x = 10^{-3}$: 2,7169 et 0,60653).

Exercice 2 – Formes 0^0 et ∞^0

a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{1/x}$ et $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$.

c) Calculer $\lim_{x\to 0^+} x^{x^x}$ … commencer par $\lim x^x$.

d) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\tan x} = 1$.

Exercice 3 – Quantités conjuguées

a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)$.

b) Calculer la même expression en $-\infty$.

c) Déterminer a et b tels que $\sqrt{x^2+x} - (ax+b) \to 0$ en $+\infty$: asymptote oblique.

d) Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

Exercice 4 – Changement de variable X = 1/x

a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right)$.

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} x \sin\frac{1}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$.

c) En utilisant $X - \frac{X^2}{2} \le \ln(1+X) \le X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3}$ ($X \ge 0$), calculer $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Contrôler c) pour $x = 200$ ($\approx -0{,}4983$).

Exercice 5 – Parties entières

a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.

b) Calculer $\lim_{x \to 0^+} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

c) Étudier $\lim_{x \to 0} x^2\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ et $\lim_{x \to 0^-} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

d) La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est-elle continue en 2 ? à droite ? à gauche ?

Exercice 6 – Rapports de sinus et de tangentes

Calculer en 0 :

a) $\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

b) $\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ (factoriser $\tan x - \sin x$).

c) $\frac{1 - \cos(3x)}{x \sin x}$.

d) $\frac{\sin(x^2)}{1 - \cos x}$.

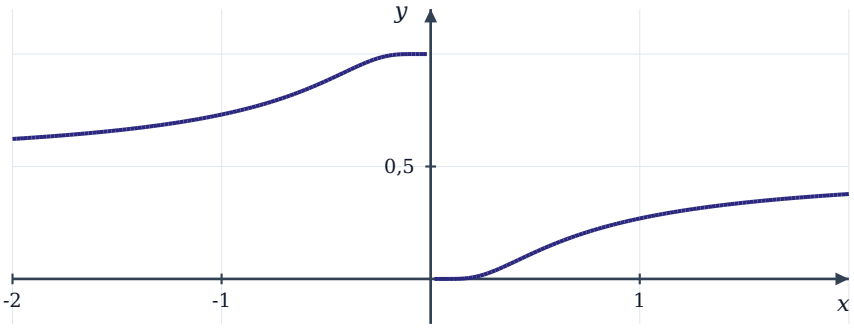
Exercice 7 – Limites unilatérales

a) Étudier les limites en 0^+ et 0^- de $e^{1/x}$ et de $\arctan \frac{1}{x}$.

b) Étudier $\frac{1}{1 + e^{1/x}}$ en $0^{\pm}$; est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

c) Montrer que $x \mapsto e^{-1/x^2}$ se prolonge par continuité en 0.

d) Montrer que ce prolongement est même dérivable en 0 de dérivée nulle.



La courbe de x ↦ 1/(1 + e^(1/x))

Exercice 8 – Discussion selon un paramètre

Pour $a \in \mathbb{R}$, étudier $\lim_{x \to +\infty} \frac{ax^3 - 2x^2 + 1}{x^2 + 5}$ et $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - ax\right)$.

a) Première limite selon a.

b) Seconde limite selon a (cas $a = 1$, $a < 1$, $a > 1$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Pour quelle valeur de a la fonction $x \mapsto \frac{\sin(ax)}{x}$ se prolonge-t-elle en 0 par la valeur 3 ?

d) Pour quelles valeurs de (a, b) la fonction $x \mapsto \frac{ax + b - \sqrt{x+1}}{x}$ a-t-elle une limite finie en 0 ? Laquelle ?

Exercice 9 – Exponentielle et encadrement

a) Montrer que $0 \le \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \le \frac{x^3}{6}\mathrm{e}^x$ pour $x \ge 0$.

b) En déduire $\lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2}$; étendre à 0^-.

c) Calculer $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2x}{x^3}$.

d) Contrôler b) pour $x = 10^{-3}$.

Exercice 10 – Logarithmes et comparaisons

a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{\ln x}$.

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} (\ln(x+1) - \ln x)$ et $\lim_{x \to +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$.

c) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(\mathrm{e}^x + x)}{x}$ et $\lim_{x \to +\infty} (\ln(\mathrm{e}^x + x) - x)$.

d) Calculer $\lim_{x \to 0^+} x \ln(\mathrm{e}^{1/x} + 1)$.

Exercice 11 – Asymptote oblique de x e^(1/x)

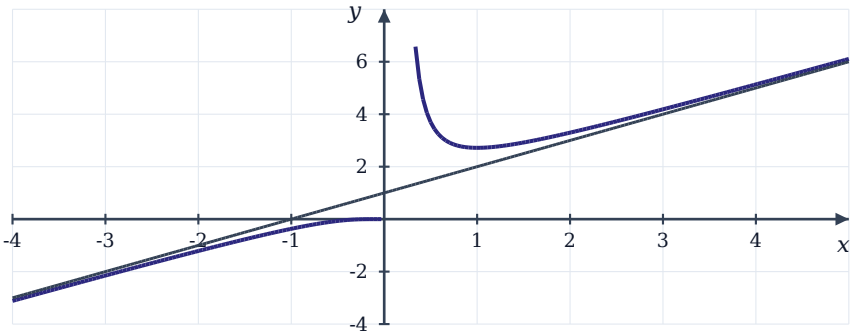
Soit $f(x) = x\mathrm{e}^{1/x}$ pour $x \neq 0$.

a) Calculer les limites de f en $\pm\infty$ et en $0^{\pm}$.

b) Montrer que $f(x) - x \to 1$ en $\pm\infty$: la droite $y = x + 1$ est asymptote.

c) Préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptote en $+\infty$ (utiliser $\mathrm{e}^X \ge 1 + X + \frac{X^2}{2}$ pour $X \ge 0$).

d) Étudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.



La courbe de x e^(1/x) et la droite y = x + 1

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Limites de puissances de référence

a) Montrer que $\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} \to \alpha$ en 0 (α réel).

b) En déduire $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$ et $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x}$.

c) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)$.

d) Contrôler b) numériquement pour $x = 10^{-3}$.

Exercice 13 – Composition et changement de variable

Calculer :

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$ (poser $x = 1+h$).

b) $\lim_{x\to \pi/2} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x$.

c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), de deux façons.

d) $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{x}$.

Exercice 14 – Limite d'une différence de puissances

Soient $a, b > 0$.

a) Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x-b^x}{x}$.

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} x\left(a^{1/x}-1\right)$.

c) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \left(x^{1+1/x}-x\right)$: montrer que $x^{1+1/x}-x \sim \ln x$.

d) En déduire que $x^{1/x} = 1 + \dfrac{\ln x}{x} + o\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

Exercice 15 – Synthèse : une limite en cascade

On étudie $L = \lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/x}-\mathrm{e}}{x}$.

a) Montrer que $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \dfrac{x}{2} + x\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ (utiliser l'encadrement de $\ln(1+x)$ pour $x > 0$, et admettre le cas $x < 0$).

b) En déduire $(1+x)^{1/x} = \mathrm{e}\cdot \mathrm{e}^{-x/2 + x\varepsilon(x)}$.

c) Conclure que $L = -\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

d) Contrôler : $(1{,}001)^{1000} \approx 2{,}716924$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).