Plaquette 3 – Continuité : TVI, bornes et bijections

Limites et continuité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Trois théorèmes portent tout le chapitre. Le **TVI** : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, donc une fonction continue qui change de signe s'annule. Le **théorème des bornes** : sur un **segment**, une fonction continue est bornée et atteint ses bornes. Le **théorème de la bijection** : une fonction continue strictement monotone sur un intervalle réalise une bijection sur l'intervalle image, de réciproque continue. La méthode type : construire une **fonction auxiliaire** (différence, $f(x) - x$, $f(x+h) - f(x)$) à laquelle on applique l'un de ces théorèmes.

Exercice 1 – Polynômes de degré impair

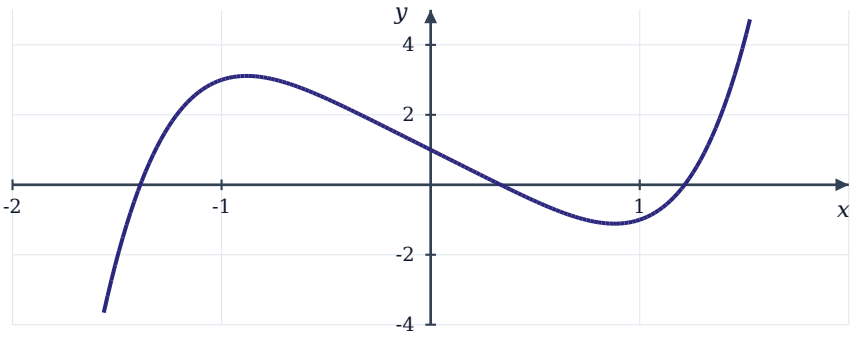
Soit $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ un polynôme réel de degré n **impair**.

a) Déterminer les limites de P en $\pm\infty$.

b) En déduire que P possède au moins une racine réelle.

c) Le résultat subsiste-t-il pour n pair ? Donner un contre-exemple.

d) Montrer que $x^5 - 3x + 1$ a exactement trois racines réelles (étudier les variations et quelques valeurs).



La courbe de $x \mapsto x^5 - 3x + 1$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 2 – Théorème de la corde universelle

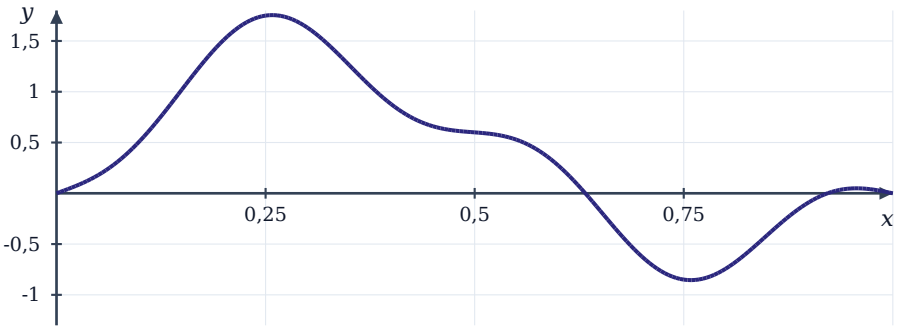
Soit f continue sur $[0,1]$ avec $f(0) = f(1)$.

a) On pose $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Calculer $g(0) + g\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) En déduire qu'il existe c tel que $f\left(c + \frac{1}{2}\right) = f(c)$: une « corde horizontale » de longueur $\frac{1}{2}$.

c) Généraliser à une corde de longueur $\frac{1}{n}$ ($n \geq 2$) avec $g(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$.

d) Interpréter pour un cycliste qui parcourt un circuit fermé (altitude de départ = altitude d'arrivée).



Une fonction continue avec f(0) = f(1)

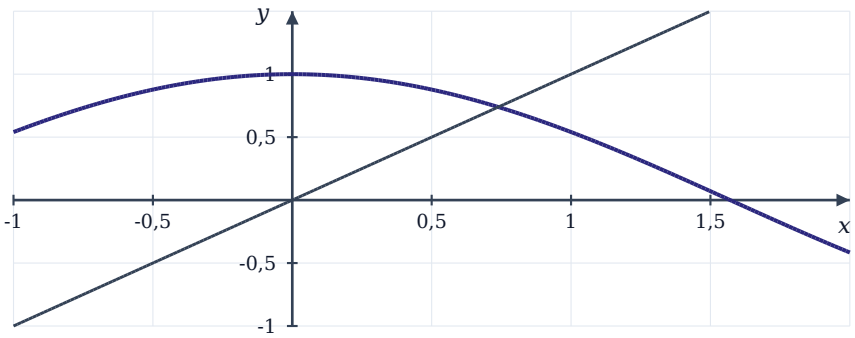
Exercice 3 – L'équation cos x = x

a) Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, et que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Appliquer la dichotomie sur $[0,1]$: donner les trois premiers intervalles.

c) Combien d'étapes faut-il pour une précision de 10^{-6} ?

d) Donner une valeur approchée de α.



Les courbes de cos (épaisse) et de y = x

Exercice 4 – Injective et continue implique monotone

Soit f continue et injective sur un intervalle I. On veut montrer que f est strictement monotone.

a) Pour $x < y$ et $x' < y'$ dans I, on pose $\varphi(t) = f((1-t)y + ty') - f((1-t)x + tx')$ pour

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$t \in [0,1]$. Justifier que φ est continue et ne s'annule pas.

b) En déduire que $f(y) - f(x)$ et $f(y') - f(x')$ ont le même signe.

c) Conclure.

d) Montrer par un exemple que le résultat est faux si f n'est pas continue, ou si I n'est pas un intervalle.

Exercice 5 – Minimum d'une fonction coercive

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{\pm\infty} f = +\infty$.

a) Justifier l'existence de $A > 0$ tel que $f(x) > f(0)$ pour $|x| > A$.

b) En déduire que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

c) Application : montrer que $x \mapsto x^4 - 4x + \mathrm{e}^{-x}$ atteint un minimum.

d) Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tendant vers 0 en $\pm\infty$ admet-elle forcément un maximum ? un minimum ?

Exercice 6 – Fonctions périodiques continues

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique ($T > 0$).

a) Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

b) Montrer que $f(\mathbb{R}) = f([0,T])$ est un segment.

c) Montrer que $x \mapsto \sin x + \sin(\sqrt{2}\,x)$ est continue et bornée, mais qu'on ne peut pas conclure qu'elle atteint son maximum par cet argument. Pourquoi ?

d) Montrer qu'une fonction continue périodique non constante n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 7 – Prolongements et continuité par morceaux

a) Pour quelles valeurs de a la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(ax)}{x}$ ($x \neq 0$), $f(0) = 2$, est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

b) Étudier la continuité en 0 de $g(x) = x \sin\frac{1}{x}$, $g(0) = 0$, et de $h(x) = \sin\frac{1}{x}$, $h(0) = 0$.

c) Déterminer a, b pour que $k(x) = \mathrm{e}^x$ sur $]-\infty, 0]$, $k(x) = ax + b$ sur $]0,1[$, $k(x) = \ln x$ sur $[1, +\infty[$ soit continue.

d) Étudier la continuité de $x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Exercice 8 – Une fonction continue en un seul point

Soit $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon.

a) Montrer que f est continue en 0.

b) Soit $a \neq 0$. En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, construire deux suites tendant vers a le long desquelles f a des limites différentes.

c) Conclure sur l'ensemble des points de continuité de f.

d) Construire sur le même modèle une fonction continue exactement en 1 et en 2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Images d'intervalles

a) Déterminer l'image de $[-1, 2]$ par $x \mapsto x^2$, et de $]0, 2\pi[$ par sin.

b) Montrer par un exemple que l'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue n'est pas forcément ouverte, et que l'image d'un intervalle borné n'est pas forcément bornée.

c) Montrer que l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

d) Existe-t-il une fonction continue de $[0, 1]$ **sur** $]0, 1[$? de $]0, 1[$ sur $[0, 1]$?

Exercice 10 – La bijection x + eˣ

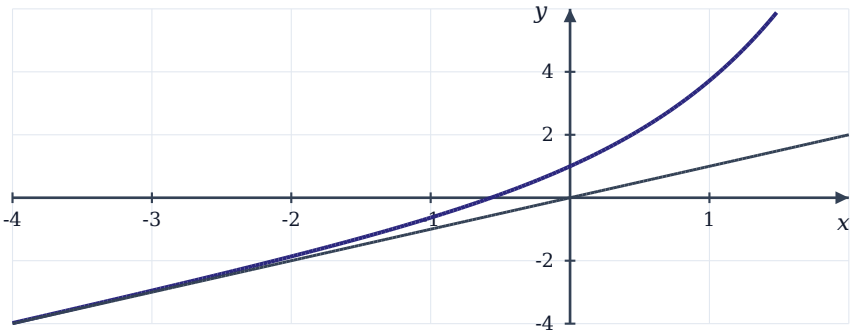
Soit $f(x) = x + \mathrm{e}^x$.

a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de réciproque continue.

b) Calculer $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(1 + \mathrm{e})$.

c) Montrer que $f^{-1}(y) \sim \ln y$ quand $y \to +\infty$ (écrire $x = \ln(y - x)$).

d) Montrer que $f^{-1}(y) \sim y$ quand $y \to -\infty$.



La courbe de $x + e^x$ (épaisse) et la droite $y = x$

Exercice 11 – Suite de racines xⁿ + x − 1 = 0

Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = x^n + x - 1$.

a) Montrer que f_n s'annule en un unique point $u_n \in [0, 1]$. Calculer u_1 et u_2.

b) Calculer le signe de $f_{n+1}(u_n)$ et en déduire que (u_n) est croissante.

c) Montrer que (u_n) converge vers une limite $\ell \leq 1$.

d) Montrer par l'absurde que $\ell = 1$ (si $\ell < 1$, étudier u_n^n).

Exercice 12 – Continuité et densité

a) Soient f, g continues sur $\mathbb{R}$, égales sur $\mathbb{Q}$. Montrer que $f = g$.

b) Soit f continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que f est constante.

c) Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) \in \mathbb{Q}$ pour tout x. Est-elle constante ?

d) Une fonction continue sur $[0, 1]$ qui ne prend que les valeurs 0 et 1 est-elle constante ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Minoration strictement positive

Soit f continue sur $[a,b]$, avec $f(x)>0$ pour tout x.

a) Montrer qu'il existe $m>0$ tel que $f \geq m$ sur $[a,b]$.

b) Le résultat subsiste-t-il sur $]0,1]$? sur $[0,+\infty[$?

c) En déduire que si f, g sont continues sur $[a,b]$ avec $f<g$, il existe $\varepsilon>0$ tel que $f+\varepsilon \leq g$.

d) Montrer que $\frac{1}{f}$ est bornée sur $[a,b]$.

Exercice 14 – Valeurs moyennes atteintes

Soit f continue sur $[0,1]$.

a) Montrer qu'il existe c tel que $f(c)=\dfrac{f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)}{3}$.

b) Plus généralement, pour $x_1,\dots,x_n \in [0,1]$ et des poids $\lambda_i \geq 0$ de somme 1, montrer que $\sum \lambda_i f(x_i)$ est une valeur de f.

c) Soit g continue et >0 sur $[0,1]$. Montrer qu'il existe c tel que $g(c)=\sqrt{g(0)g(1)}$.

d) Application : sur un trajet où la vitesse varie continûment, montrer qu'à un certain instant la vitesse est égale à la moyenne des vitesses relevées à trois instants.

Exercice 15 – Limite finie à l'infini et bornes

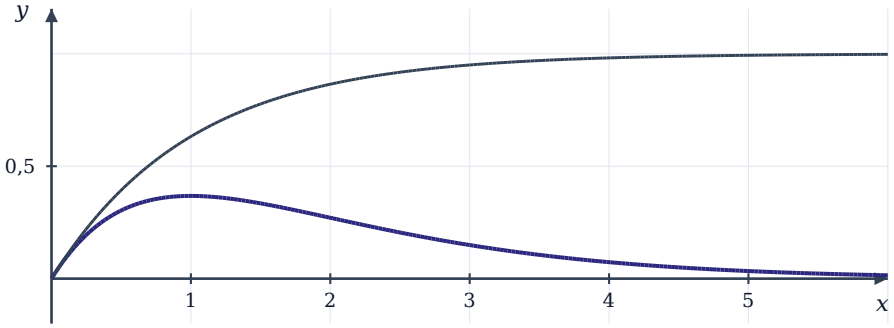
Soit f continue sur $[0,+\infty[$, de limite finie ℓ en $+\infty$.

a) Montrer que f est bornée.

b) Montrer que si $f(0)>\ell$, alors f atteint son maximum.

c) Étudier les exemples $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$ et $x \mapsto 1-\mathrm{e}^{-x}$: quelles bornes sont atteintes ?

d) Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ de même limite finie en $\pm\infty$ atteint son maximum ou son minimum.



x e^(−x) (épaisse) et 1 − e^(−x)

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).