Plaquette 4 – Équations fonctionnelles, lipschitziennes, continuité uniforme

Limites et continuité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour une **équation fonctionnelle**, on teste des valeurs particulières ($x = y = 0$, $y = -x$), on détermine f sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ par récurrence, puis on conclut sur $\mathbb{R}$ par **continuité et densité**. Pour une relation du type $f(x) = f(\varphi(x))$, on itère : $f(x) = f(\varphi^n(x))$, et l'on fait tendre n vers l'infini en utilisant la continuité au point limite. La **continuité uniforme** (un même η pour tous les points) se prouve par une inégalité de Lipschitz ou par le théorème de **Heine** sur un segment ; elle se réfute avec deux suites $x_n - y_n \to 0$ et $|f(x_n) - f(y_n)|$ ne tendant pas vers 0.

Exercice 1 – Équation de Cauchy additive

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous x, y. On pose $a = f(1)$.

a) Calculer $f(0)$ et montrer que f est impaire.

b) Montrer que $f(n) = an$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis pour $n \in \mathbb{Z}$.

c) Montrer que $f(r) = ar$ pour $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (calculer $qf\left(\frac{p}{q}\right)$).

d) Conclure que $f(x) = ax$ pour tout x réel.

Exercice 2 – Équations exponentielle et logarithmique

a) Soit f continue sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, telle que $f(x + y) = f(x)f(y)$. Montrer que $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$, puis que f ne s'annule pas.

b) En déduire que $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ (appliquer l'exercice précédent à $\ln f$).

c) Soit g continue sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $g(xy) = g(x) + g(y)$. Montrer que $g = a \ln$ (poser $h(t) = g(\mathrm{e}^t)$).

d) Déterminer les f continues sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que $f(xy) = f(x)f(y)$ et $f > 0$.

Exercice 3 – Les relations f(2x) = f(x) et f(x²) = f(x)

a) Soit f continue sur $\mathbb{R}$ avec $f(2x) = f(x)$ pour tout x. Montrer que $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$ et en déduire que f est constante.

b) Soit f continue sur $\mathbb{R}$ avec $f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est paire, puis que pour $x > 0$, $f(x) = f\left(x^{1/2^n}\right)$.

c) En déduire que f est constante.

d) Sans continuité, trouver une fonction non constante vérifiant $f(2x) = f(x)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Deux périodes incommensurables

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x+1) = f(x)$ et $f(x+\sqrt{2}) = f(x)$.

a) Montrer que $f(x + p + q\sqrt{2}) = f(x)$ pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$.

b) On admet que $G = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (sous-groupe non monogène). En déduire que f est constante.

c) Le résultat subsiste-t-il avec les périodes 1 et $\frac{3}{2}$?

d) Montrer que l'indicatrice $\mathbf{1}_G$ de $G = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z}$ admet 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes : la continuité est-elle nécessaire en b) ?

Exercice 5 – Racine carrée : continuité uniforme sans Lipschitz

a) Montrer que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le \sqrt{|x-y|}$ pour $x, y \ge 0$.

b) En déduire que $\sqrt{\cdot}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$ (donner η en fonction de ε).

c) Montrer que $\sqrt{\cdot}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$ (étudier $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0}$).

d) Montrer qu'elle est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.

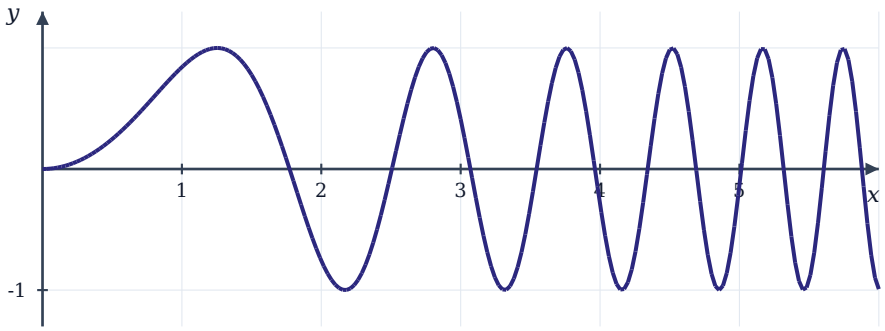
Exercice 6 – Réfuter la continuité uniforme

a) Montrer que $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (suites $x_n = n + \frac{1}{n}$, $y_n = n$).

b) Montrer que $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.

c) Montrer que $x \mapsto \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que $x \mapsto x \sin\frac{1}{x}$ est uniformément continue sur $]0, 1]$ (prolonger en 0 et utiliser Heine).



La courbe de sin(x²) : oscillations de plus en plus rapides

Exercice 7 – Uniformément continue ⇒ limite au bord

Soit f uniformément continue sur $]0, 1]$.

a) Soit (x_n) une suite de $]0, 1]$ tendant vers 0. Montrer que $(f(x_n))$ est de Cauchy.

b) Montrer que la limite de $(f(x_n))$ ne dépend pas de la suite choisie (entrelacer deux suites).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire que f admet une limite finie en 0 et se prolonge par continuité à $[0,1]$.

d) Retrouver ainsi que $\sin\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x}$ ne sont pas uniformément continues sur $]0,1]$.

Exercice 8 – Itérations contractantes

On étudie $u_0 \in [0,1]$, $u_{n+1} = \cos u_n$.

a) Montrer que $[0,1]$ est stable par cos et que cos y est k-lipschitzienne avec $k = \sin 1 < 1$.

b) Soit α l'unique point fixe de cos dans $[0,1]$. Montrer que $|u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n$.

c) Combien d'itérations garantissent $|u_n - \alpha| \leq 10^{-6}$?

d) Comparer à la dichotomie (20 étapes) : pourquoi la contraction est-elle ici plus lente en garantie ?

Exercice 9 – Involutions continues

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f = \mathrm{id}$.

a) Montrer que f est bijective, donc strictement monotone.

b) On suppose f croissante. Si $f(x) > x$ pour un x, montrer que $x = f(f(x)) > f(x)$: contradiction. Conclure que $f = \mathrm{id}$.

c) Vérifier que $x \mapsto a - x$ convient pour tout a. En existe-t-il d'autres, décroissantes ?

d) Montrer qu'une involution continue décroissante a exactement un point fixe.

Exercice 10 – Équation de Jensen

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ pour tous x, y.

a) On pose $g = f - f(0)$. Vérifier que g satisfait la même relation et $g(0) = 0$.

b) Montrer que $g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{g(x)}{2}$.

c) En déduire que $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

d) Conclure : f est affine.

Exercice 11 – Fonctions dilatantes

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ pour tous x, y.

a) Montrer que f est injective, donc strictement monotone.

b) On suppose f croissante. Montrer que $f(x) \geq f(0) + x$ pour $x \geq 0$ et $f(x) \leq f(0) + x$ pour $x \leq 0$.

c) En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que f^{-1} est 1-lipschitzienne.

Exercice 12 – Limites en l'infini et continuité uniforme

Soit f continue sur $[0, +\infty[$ avec une limite finie ℓ en $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$.

a) Justifier l'existence de A tel que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ pour $x, y \geq A$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Appliquer Heine sur $[0, A+1]$.

c) Conclure que f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

d) Montrer que $x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{1+x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$, alors que $\sin(x^2)$ ne l'est pas.

Exercice 13 – L'équation 2f(2x) = f(x) + x

On cherche les f continues sur $\mathbb{R}$ telles que $2f(2x) = f(x) + x$.

a) Chercher une solution linéaire $x \mapsto cx$.

b) On pose $g(x) = f(x) - \frac{x}{3}$. Montrer que $2g(2x) = g(x)$, puis $g(x) = \frac{1}{2^n} g\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

c) En déduire que $g = 0$.

d) Sans hypothèse de continuité, montrer que $g(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $g(0) = 0$ vérifie $2g(2x) = g(x)$.

Exercice 14 – Fonctions lipschitziennes : opérations

a) Montrer que la somme de deux fonctions lipschitziennes est lipschitzienne, et que la composée d'une k-lipschitzienne et d'une k'-lipschitzienne est kk'-lipschitzienne.

b) Le produit de deux fonctions lipschitziennes sur $\mathbb{R}$ l'est-il ? (exemple $x \cdot x$)

c) Montrer que le produit de deux fonctions lipschitziennes **bornées** est lipschitzien.

d) Montrer que $x \mapsto |x|$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \mathrm{dist}(x, \mathbb{Z})$ sont 1-lipschitziennes.

Exercice 15 – Point fixe d'une fonction décroissante

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue.

a) Montrer que f a un point fixe (TVI sur $f(x) - x$).

b) Si de plus f est décroissante, montrer que le point fixe est unique.

c) Soit f continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$ **croissante** : montrer que f a un plus petit point fixe (considérer $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 = 0$).

d) Montrer que, pour f continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \circ f$ a un point fixe si et seulement si f en a un.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).