Plaquette 1 – Calculs de limites, théorèmes de comparaison et TVI

Limites et continuité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On lève des formes indéterminées (factorisation, quantité conjuguée, taux de variation), on applique les théorèmes d'**encadrement** et de comparaison, on utilise la **continuité** et le **théorème des valeurs intermédiaires**, et l'on traite les prolongements par continuité.

Exercice 1 – Limites d'un quotient de polynômes

Calculer :

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + 5}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - 2}$

Exercice 2 – Quantité conjuguée

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right)$.

Exercice 3 – Forme 0/0

Calculer $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$.

Exercice 4 – Taux de variation

Calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\sin x}$.

Exercice 5 – Théorème des gendarmes

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$, puis $\lim_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

Exercice 6 – Comparaison

Montrer que $\lim_{x \to +\infty} (x + \cos x) = +\infty$.

Exercice 7 – Continuité et prolongement

Soit $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ pour $x \neq 1$.

a) f est-elle définie en 1 ?

b) Peut-on la prolonger par continuité en 1 ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Continuité d'une fonction définie par morceaux

Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ ax - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

Déterminer a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 – Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$.

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans $[0\,;1]$.

b) Montrer que cette solution est unique dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10 – TVI sur un intervalle non borné

Montrer que l'équation $e^x = 3 - x$ admet une unique solution réelle.

Exercice 11 – Théorème des bornes

Soit f continue sur $[0\,;1]$ à valeurs réelles.

a) Que peut-on affirmer sur f d'après le théorème des bornes ?

b) La conclusion vaut-elle sur $]0\,;1[$? Donner un contre-exemple.

Exercice 12 – Composition de limites

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x \to 0^+} e^{-1/x}$.

Exercice 13 – Caractérisation séquentielle et absence de limite

a) Rappeler la caractérisation séquentielle : $f(x) \to \ell$ en a si et seulement si $f(x_n) \to \ell$ pour **toute** suite $x_n \to a$.

b) En utilisant $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, montrer que $\cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

c) Montrer que $x\cos\frac{1}{x} \to 0$ en 0.

d) La fonction $1_{\mathbb{Q}}$ (qui vaut 1 sur $\mathbb{Q}$, 0 ailleurs) a-t-elle une limite en un point ?

Exercice 14 – Théorème du point fixe par le TVI

Soit f:$[0,1] \to [0,1]$ continue.

a) Montrer que $g(x) = f(x) - x$ vérifie $g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 0$.

b) En déduire que f a un point fixe.

c) Montrer que ce point fixe est unique si f est décroissante.

d) Application : montrer que cos a un unique point fixe dans $[0,1]$.

Exercice 15 – Synthèse : étude complète

Soit $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Déterminer le domaine de f et simplifier son expression.
b) Peut-on prolonger f par continuité en 1 ?
c) Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).