Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : limites et continuité

Limites et continuité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Ces problèmes combinent les outils du chapitre : limites de référence et encadrements, caractérisation séquentielle, TVI appliqué à une fonction auxiliaire bien choisie, théorème des bornes sur un segment, monotonie. Plusieurs sont des **modèles concrets** (randonneur, températures antipodales, coureur) dont la preuve tient en une fonction auxiliaire. Méthode : traduire l'énoncé en « une fonction continue change de signe » ou « une fonction continue sur un segment atteint son extremum », puis vérifier les hypothèses une à une (continuité, intervalle, segment).

Exercice 1 – Le randonneur

Un randonneur monte au sommet d'une montagne entre 8 h et 18 h, dort au sommet, puis redescend le lendemain par le même chemin, entre 8 h et 18 h. On note $m(t)$ et $d(t)$ ses positions (distance au départ, le long du chemin) à l'heure $t \in [8, 18]$ le premier et le second jour ; ces fonctions sont continues.

a) Que valent $m(8)$, $m(18)$, $d(8)$, $d(18)$ en fonction de la longueur L du chemin ?

b) Montrer qu'il existe une heure t à laquelle le randonneur est au même point les deux jours.

c) Cette heure est-elle unique ? (considérer des allures quelconques)

d) Donner l'heure si $m(t) = L\frac{t-8}{10}$ et $d(t) = L\left(1 - \left(\frac{t-8}{10}\right)^2\right)$.

Exercice 2 – Températures antipodales

On modélise la température le long de l'équateur par une fonction continue $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique (θ = longitude en radians).

a) On pose $g(\theta) = T(\theta + \pi) - T(\theta)$. Calculer $g(\theta + \pi)$ en fonction de $g(\theta)$.

b) En déduire qu'il existe deux points diamétralement opposés de l'équateur ayant la même température.

c) Vérifier sur $T(\theta) = 20 + 5\cos\theta + 3\sin 2\theta$: trouver de tels points.

d) Le résultat vaut-il pour trois points à 120° les uns des autres ? (tester $T = \cos\theta$)

Exercice 3 – Le coureur et la corde universelle

Un coureur parcourt 10 km en exactement 50 minutes, à allure variable ; $x(t)$ est la distance parcourue à l'instant $t \in [0, 50]$, continue et croissante.

a) Montrer qu'il existe un intervalle de 25 minutes pendant lequel il parcourt exactement 5 km (poser $g(t) = x(t + 25) - x(t) - 5$).

b) Montrer de même qu'il existe un intervalle de 10 minutes où il parcourt exactement 2 km.

c) Soit $f(t) = \sin^2\left(\frac{\pi t}{20}\right) - \frac{t}{50}$ sur $[0, 50]$. Vérifier que $f(0) = f(50) = 0$ et que

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$f(t+20) - f(t) = -0{,}4$ pour tout $t \in [0, 30]$. En déduire (avec $x(t) = \frac{t}{5} + f(t)$, en admettant qu'on peut rendre une telle allure croissante en ajustant les constantes) pourquoi l'argument de a) échoue pour $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$.

d) Pour quelles fractions $\frac{\tau}{50}$ le résultat est-il garanti ?

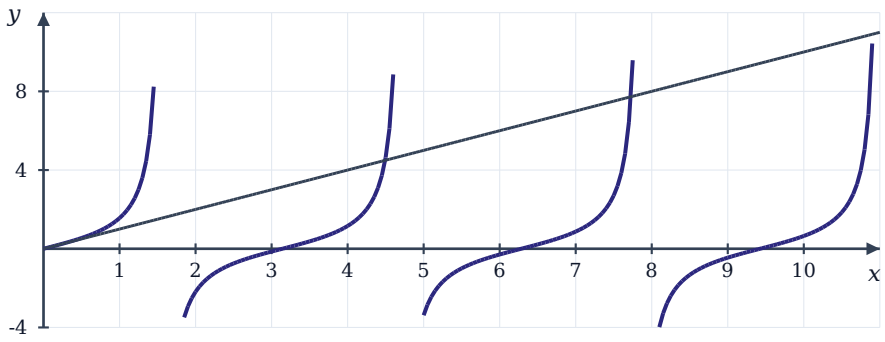
Exercice 4 – Racines de tan x = x

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $\tan x = x$ a une unique solution x_n dans $I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que $x_n \in \left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.

c) Montrer que $x_n - n\pi \to \frac{\pi}{2}$ (écrire $x_n - n\pi = \arctan x_n$).

d) Donner une valeur approchée de x_1.



Les courbes de tan (épaisse) et de y = x

Exercice 5 – Limite d'une suite récurrente

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

a) Montrer que $0 \leq u_n \leq 2$ et que (u_n) est croissante.

b) En déduire qu'elle converge ; identifier sa limite grâce à la continuité.

c) Montrer que $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$ et majorer l'erreur.

d) Donner un exemple de fonction f **discontinue** et de suite $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers un ℓ qui n'est **pas** un point fixe.

Exercice 6 – Discontinuités d'une fonction monotone

Soit f croissante sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que f admet en tout point a une limite à gauche $f(a^-)$ et à droite $f(a^+)$, avec $f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+)$.

b) Montrer que f est continue en a si et seulement si $f(a^-) = f(a^+)$.

c) Pour chaque point de discontinuité a, on choisit un rationnel $r(a) \in]f(a^-), f(a^+)[$. Montrer que $a \mapsto r(a)$ est injective.

d) En déduire que l'ensemble des discontinuités de f est au plus dénombrable.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Césaro pour les fonctions

Soit f continue sur $[0, +\infty[$ telle que $f(x+1) - f(x) \to \ell$ quand $x \to +\infty$.

a) Soit $\varepsilon > 0$ et A tel que $|f(x+1) - f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ pour $x \geq A$. Pour $x \geq A$, on écrit $x = A + t + n$ avec $t \in [0, 1[$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $|f(x) - f(A+t) - n\ell| \leq n\varepsilon$.

b) Soit M un majorant de $|f|$ sur $[A, A+1]$. En déduire que $\left|\frac{f(x)}{x} - \ell\right| \leq 2\varepsilon$ pour x assez grand.

c) Conclure : $\frac{f(x)}{x} \to \ell$.

d) Applications : $f(x) = \sqrt{x}$; $f(x) = x + \sin(2\pi x)$; $f(x) = x \ln x$: que donne le résultat ?

Exercice 8 – Aucune fonction continue ne prend chaque valeur deux fois

On suppose par l'absurde que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et prend chaque valeur **exactement deux fois**. Soient $a < b$ avec $f(a) = f(b) = c$.

a) Montrer que $f - c$ garde un signe constant sur $]a, b[$; on suppose $f > c$ sur $]a, b[$.

b) Soit $M = \max_{[a,b]} f$, atteint en $d \in]a, b[$. Si M est atteint une seconde fois en $d' \in [a, b]$, montrer qu'une valeur légèrement inférieure à M est prise au moins trois fois.

c) Si M n'est atteint qu'en d sur $[a, b]$, il l'est en un $e \notin [a, b]$, disons $e > b$. Montrer qu'une valeur $y \in]c, M[$ est prise trois fois.

d) Conclure. Existe-t-il en revanche une fonction continue prenant chaque valeur exactement **trois** fois ?

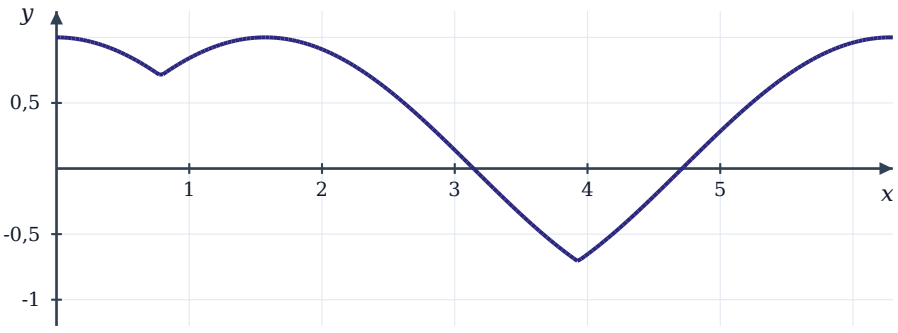
Exercice 9 – Maximum de deux fonctions continues

a) Vérifier que $\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}$ et $\min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}$.

b) En déduire que si f et g sont continues, $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ le sont.

c) Montrer que $f^+ = \max(f, 0)$ et $|f|$ sont continues ; exprimer f et $|f|$ à l'aide de f^+ et $f^- = \max(-f, 0)$.

d) Montrer que $x \mapsto \max(\sin x, \cos x)$ est continue, et déterminer son minimum sur $[0, 2\pi]$.



La courbe de max(sin x, cos x)

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Limite simple de fonctions continues

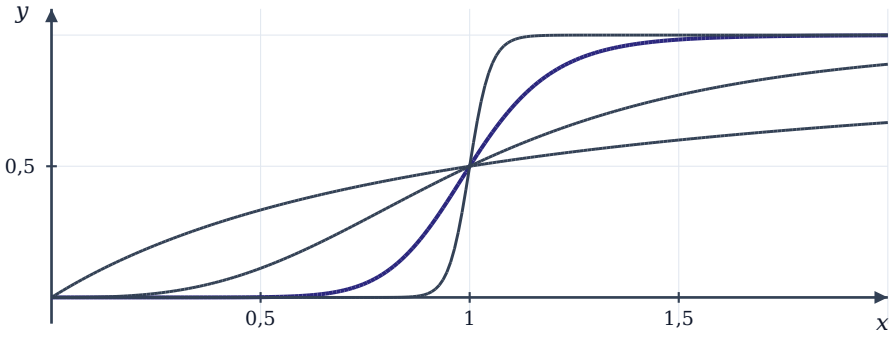
Pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$.

a) Calculer $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ selon que $x < 1$, $x = 1$, $x > 1$.

b) La fonction f est-elle continue ? Que retenir ?

c) Pour $x \in [0, 1[$ fixé, à partir de quel rang $f_n(x) \leq 10^{-3}$ si $x = 0{,}9$?

d) Montrer que $\sup_{[0,1[} |f_n - f| = \dfrac{1}{2}$ pour tout n : la convergence n'est pas « uniforme ».



f_{10} (épaisse), f_1, f_3 et f_{40}

Exercice 11 – Refroidissement et limites

La température d'un café suit $T(t) = 20 + 60\,\mathrm{e}^{-kt}$ (t en minutes, $k > 0$), avec $T(10) = 50$.

a) Déterminer k et $\lim_{t \to +\infty} T(t)$.

b) Montrer qu'il existe un unique instant où le café est à 40 °C, et le calculer.

c) Calculer $\lim_{t \to 0} \dfrac{T(t) - 80}{t}$: vitesse initiale de refroidissement.

d) Le modèle suppose la température continue : justifier par le TVI que le café passe par toutes les températures entre 80 et 20 exclus.

Exercice 12 – Nombre d'étapes de dichotomie

On cherche la racine positive α de $x^3 - 2 = 0$ par dichotomie sur $[1, 2]$.

a) Justifier l'existence et l'unicité de α sur $[1, 2]$.

b) Effectuer quatre étapes : donner l'encadrement obtenu.

c) Combien d'étapes pour une précision de 10^{-6} ? de 10^{-12} ?

d) Combien de chiffres décimaux exacts gagne-t-on en moyenne par étape ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Prolongement et étude d'une fonction

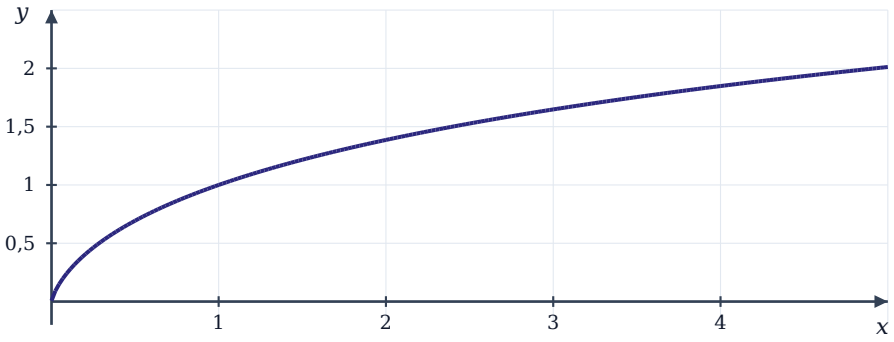
Soit $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x-1}$ sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

a) Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et en 1 ; préciser les valeurs.

b) Calculer $\lim_{+\infty} f$ et $\lim_{+\infty} \dfrac{f(x)}{\ln x}$.

c) Montrer que $f(x) \geq 0$ sur $]0,+\infty[$.

d) Montrer que $f(x) \leq \dfrac{x+1}{2}$ pour $x > 1$ en utilisant $\ln x \leq \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ (admis) et $\sqrt{x} \leq \dfrac{x+1}{2}$.



La courbe de x ln x / (x − 1)

Exercice 14 – Fonction continue et suites denses

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique.

a) Montrer que $f(n\sqrt{2})$ est « partout dense » dans $f([0,1])$: pour tout $y = f(t)$ et $\varepsilon > 0$, il existe n avec $|f(n\sqrt{2}) - y| \leq \varepsilon$ (admettre que les parties fractionnaires $\{n\sqrt{2}\}$ sont denses dans $[0,1]$).

b) En déduire que si $f(n\sqrt{2}) \to 0$, alors $f = 0$.

c) Application : montrer que $\sin(n)$ n'a pas de limite quand $n \to \infty$ (admettre la densité de $\{\frac{n}{2\pi}\}$).

d) Et $\sin(n\pi)$?

Exercice 15 – Synthèse : une fonction définie par une limite

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

a) Calculer $f(x)$ selon $|x| < 1$, $|x| = 1$, $|x| > 1$.

b) Étudier la continuité de f et de $g(x) = xf(x)$.

c) Trouver a tel que $h(x) = (x^2 - a)f(x)$ soit continue sur $\mathbb{R}$.

d) Représenter h pour cette valeur de a et montrer qu'elle atteint son minimum.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).