Plaquette 1 – Calcul matriciel, inverse, rang et puissances

Matrices — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Opérations.

— **Produit** : $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ — défini si le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B.

— Le produit est **associatif** et distributif, mais **pas commutatif** : en général $AB \neq BA$.

— **Transposée** : $\left(A^{\mathsf{T}}\right)_{ij} = a_{ji}$, et $(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}$.

— **Binôme de Newton** : $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$ **uniquement si** $AB = BA$.

Inversibilité.

— $A \in M_n(\mathrm{K})$ est inversible s'il existe B telle que $AB = BA = I_n$. En dimension finie, $AB = I_n$ suffit.

— $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ (l'ordre s'inverse).

— **Cas** 2×2 : si $ad - bc \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

— **Polynôme annulateur** : si $A^2 = A + 2I$, alors $A(A - I) = 2I$, donc $A^{-1} = \dfrac{A - I}{2}$. Toute relation dont le **terme constant est non nul** fournit l'inverse.

— **Équivalences** : A inversible $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = n \Leftrightarrow A$ est échelonnée en $I_n \Leftrightarrow$ le système $AX = 0$ n'a que la solution nulle.

Rang. Nombre de pivots après échelonnement par les **opérations élémentaires** ($L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$). Le rang est invariant par ces opérations, et $\mathrm{rg}\left(A^{\mathsf{T}}\right) = \mathrm{rg}(A)$.

Matrices nilpotentes. N est nilpotente si $N^p = 0$ pour un certain p. Alors $I - N$ est inversible, d'inverse $I + N + \ldots + N^{p-1}$.

Correction de l'exercice 1 – Produit matriciel

Calcul de AB : chaque coefficient est un produit ligne par colonne.

$$AB = \begin{pmatrix} 1\times 0 + 2 \times 1 & 1 \times 1 + 2 \times 0 \\ 3 \times 0 + 4 \times 1 & 3 \times 1 + 4 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcul de BA :

$$BA = \begin{pmatrix} 0 \times 1 + 1 \times 3 & 0 \times 2 + 1 \times 4 \\ 1 \times 1 + 0 \times 3 & 1 \times 2 + 0 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

— $AB \neq BA$: le produit matriciel n'est **pas commutatif**.

— **Lecture** : multiplier par B **à droite** échange les colonnes de A ; multiplier **à gauche** échange ses lignes. B est une matrice de permutation.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 2 – Inverse d'une matrice 2x2

Déterminant : $ad - bc = 3 \times 2 - 5 \times 1 = 1 \neq 0$, donc A est inversible.

— **Formule** :

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

— **Vérification** :

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 + 5 \times (-1) & 3 \times (-5) + 5 \times 3 \\ 1 \times 2 + 2 \times (-1) & 1 \times (-5) + 2 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— Cohérent.

— **Mnémotechnique** : on **échange** les termes diagonaux, on **change le signe** des autres, et on divise par le déterminant.

Réponse. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3 – Inversion par Gauss-Jordan

La matrice est **triangulaire supérieure** à diagonale de 1 : elle est inversible.

Méthode du polynôme annulateur. Posons $A = I + N$ avec

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$: N est **nilpotente d'indice 3**.

— Donc $(I + N)^{-1} = I - N + N^2$ (identité $(I + N)(I - N + N^2) = I + N^3 = I$).

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— **Vérification de la première ligne** : $(1, -1, 1)$ multipliée par les colonnes de A donne 1, $1 - 1 = 0$, $-1 + 1 = 0$. Cohérent.

— **Remarque** : on aurait obtenu le même résultat par Gauss-Jordan, mais le calcul nilpotent est immédiat.

Réponse. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4 – Rang d'une matrice

On échelonne par opérations élémentaires sur les lignes.

— $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: la deuxième ligne devient $(0, 0, 0)$ — elle était le **double** de la première.

— $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$: la troisième devient $(0, -1, -2)$.

— La matrice échelonnée est

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— Il reste **2 pivots** (en positions $(1,1)$ et $(2,2)$), donc $\mathrm{rg}(A) = 2$.
— **Conséquence** : A n'est **pas inversible** (le rang est < 3), et le système $AX = 0$ admet des solutions non nulles.
— **Contrôle** : $L_2 = 2L_1$ était visible d'emblée — une dépendance linéaire évidente fait chuter le rang.

Réponse. $\mathrm{rg}(A) = 2$; A n'est pas inversible.

Correction de l'exercice 5 – Puissances par récurrence

Calcul des premières puissances :

— $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.
— On conjecture $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ (les coefficients 1, 3, 7 sont $2^n - 1$).

Démonstration par récurrence.

— **Initialisation** : $n = 0$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Vrai.
— **Hérédité** : si la formule vaut au rang n,

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 + 2(2^n - 1) \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

— Or $1 + 2^{n+1} - 2 = 2^{n+1} - 1$: la formule est bien vérifiée au rang $n + 1$.
— **Conclusion** : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
— **Contrôle** : $n = 3$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. Cohérent.

Réponse. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 6 – Puissances par le binôme

On écrit $A = 2I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

— N **est nilpotente** : $N^2 = 0$.
— $2I$ et N **commutent** (une matrice scalaire commute avec tout) : le **binôme de Newton** s'applique.

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I)^{n-k} N^k = (2I)^n + n(2I)^{n-1} N$$

— Tous les termes $k \geq 2$ sont nuls.

$$A^n = 2^n I + n 2^{n-1} N = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôle** : $n = 2$ donne $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, et le produit direct $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2+2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Cohérent.

— **Condition cruciale** : sans commutation, le binôme est **faux**.

Réponse. $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 7 – Polynôme annulateur et inverse

a) **Calcul** : $A^2 = \begin{pmatrix} 1+4 & 2+2 \\ 2+2 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

— Et $2A + 3I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. **Égalité vérifiée.**

b) On isole I dans la relation.

— $A^2 - 2A = 3I$, soit $A(A - 2I) = 3I$, donc $A \times \dfrac{A - 2I}{3} = I$.

— A est donc inversible et $A^{-1} = \dfrac{A - 2I}{3} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

— **Vérification par la formule** 2×2 : $\det A = 1 - 4 = -3$, donc $A^{-1} = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ — même résultat. Cohérent.

— **Méthode générale** : un polynôme annulateur à **terme constant non nul** prouve l'inversibilité et donne l'inverse comme polynôme en A.

Réponse. b) $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 8 – Matrices qui commutent

Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et écrivons $AM = MA$.

— $AM = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$.

— $MA = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$.

— **Identification** : $a + c = a$ donne $c = 0$; $b + d = a + b$ donne $d = a$; la dernière ligne est alors automatique.

— **Solutions** : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI + bN$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

— Le **commutant** de A est donc l'ensemble des **polynômes en** A (ici $aI + bN = (a - b)I + bA$), un sous-espace de dimension 2.

— **Contrôle** : I et A commutent bien avec A, et ils sont de cette forme.

Réponse. $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 9 – Transposée et symétrie

— **Symétrie** : $\left(A + A^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + A$ — la matrice est égale à sa transposée, donc **symétrique**.

— **Antisymétrie** : $\left(A - A^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} - A = -\left(A - A^{\mathsf{T}}\right)$ — **antisymétrique**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Décomposition générale** :

$$A = \frac{A + A^{\mathsf{T}}}{2} + \frac{A - A^{\mathsf{T}}}{2}$$

le premier terme étant **symétrique**, le second **antisymétrique**.

Application. $A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

— Partie symétrique : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

— Partie antisymétrique : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

— **Contrôle** : la somme vaut $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = A$. Cohérent.

Réponse. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l’exercice 10 – Trace

a) Par définition, $\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_i \sum_k a_{ik} b_{ki}$.

— En échangeant l’ordre des sommations : $\sum_k \sum_i b_{ki} a_{ik} = \sum_k (BA)_{kk} = \operatorname{tr}(BA)$.

— **Conclusion** : $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, même si $AB \neq BA$.

b) Supposons $AB - BA = I_n$.

— En passant à la trace : $\operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(I_n) = n$.

— Or le membre de gauche est **nul** d’après a).

— Donc $n = 0$: impossible pour $n \geq 1$. **Aucune** telle paire de matrices n’existe.

— **Portée** : en dimension infinie, la relation $AB - BA = I$ existe (opérateurs position et impulsion en mécanique quantique) — c’est précisément parce que la trace n’y est pas définie.

Réponse. a) double somme symétrique · b) la trace donnerait $0 = n$.

Correction de l’exercice 11 – Système et matrice inverse

Le système s’écrit $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

— A est inversible d’inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

— **Solution** : $X = A^{-1}B$:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \times 4 + (-5) \times 1 \\ -1 \times 4 + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

— **Vérification** : $3 \times 3 + 5 \times (-1) = 9 - 5 = 4$ et $3 + 2 \times (-1) = 1$. Cohérent.

— **Intérêt** : quand on doit résoudre **plusieurs** systèmes de même matrice A et de seconds membres différents, calculer A^{-1} une fois est rentable. Pour un seul système, le pivot de Gauss est plus rapide.

Réponse. $x = 3$ et $y = -1$.

Correction de l’exercice 12 – Inverse de I − N pour N nilpotente

a) Le produit d’une matrice strictement triangulaire par elle-même « décale » les

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

coefficients vers le coin supérieur droit :

— $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (seul le coefficient $(1,3)$ subsiste : $1 \times 3 = 3$) et $N^3 = N^2 N = 0$.

b) I_3 et N commutent, donc la factorisation de $I - N^3$ s'applique :

$$(I_3 - N)(I_3 + N + N^2) = I_3 - N^3 = I_3$$

— Donc $(I_3 - N)^{-1} = I_3 + N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— **Vérification** : $I_3 - N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; la première ligne du produit vaut $(1,\ 1-1,\ 5-3-2) = (1,0,0)$, la deuxième $(0,1,3-3) = (0,1,0)$. Cohérent.

Réponse. $N^2 = 3E_{13}$, $N^3 = 0$; $(I_3 - N)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 13 – Matrices élémentaires et centre

a) Le coefficient (p, q) du produit est $\sum_r (E_{ij})_{pr}(E_{kl})_{rq}$; un terme n'est non nul que si $p = i$, $r = j$, $r = k$, $q = l$. D'où

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$$

b) Écrivons $M = \sum_{p,\,q} m_{pq}E_{pq}$. D'après a) :

— $ME_{ij} = \sum_p m_{pi}E_{pj}$ (seule la colonne j est remplie, par la colonne i de M) ;

— $E_{ij}M = \sum_q m_{jq}E_{iq}$ (seule la ligne i est remplie, par la ligne j de M).

— En identifiant : pour $p \neq i$, $m_{pi} = 0$; et le coefficient (i,j) donne $m_{ii} = m_{jj}$.

— Tous les coefficients hors diagonale sont nuls et les diagonaux sont égaux : $M = \lambda I_n$. Réciproquement, λI_n commute avec tout.

Réponse. $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$; les matrices qui commutent avec toutes les autres sont les λI_n.

Correction de l'exercice 14 – Rang selon un paramètre

On échelonne par opérations élémentaires sur les lignes, qui conservent le rang.

— $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$: $(0,\ a-1,\ 1-a)$; $L_3 \leftarrow L_3 - aL_1$: $(0,\ 1-a,\ 1-a^2)$.

— $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$: $(0,\ 0,\ (1-a)+(1-a^2)) = (0,\ 0,\ (1-a)(2+a))$.

La matrice échelonnée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) \end{pmatrix}$$

— **Cas** $a = 1$: les deux dernières lignes sont nulles, $\mathrm{rg}A = 1$ (toutes les lignes valent $(1,1,1)$).

— **Cas** $a = -2$: la dernière ligne est nulle, la deuxième vaut $(0,-3,3) \neq 0$: $\mathrm{rg}A = 2$.

— **Sinon** : trois pivots non nuls, $\mathrm{rg}A = 3$ et A est inversible.

— **Contrôle** pour $a = -2$: la somme des trois lignes de A vaut $(0,0,0)$, relation de dépendance attendue.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. rg$A = 1$ si $a = 1$, 2 si $a = -2$, 3 sinon.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : suite et matrices

a) En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on a $X_{n+1} = AX_n$, donc $X_n = A^n X_0$.

b) **Astuce des combinaisons** : on additionne puis on soustrait les deux relations.

— $s_n = u_n + v_n$ vérifie $s_{n+1} = 3u_n + 3v_n = 3s_n$: suite géométrique de raison 3, avec $s_0 = 1$. Donc $s_n = 3^n$.

— $d_n = u_n - v_n$ vérifie $d_{n+1} = u_n - v_n = d_n$: suite **constante**, avec $d_0 = 1$. Donc $d_n = 1$.

— **Résolution** : $u_n = \dfrac{s_n + d_n}{2} = \dfrac{3^n + 1}{2}$ et $v_n = \dfrac{s_n - d_n}{2} = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

— **Contrôle** : $u_1 = 2$, $v_1 = 1$ par les formules ; et directement $u_1 = 2 \times 1 + 0 = 2$, $v_1 = 1 + 0 = 1$. Cohérent. $u_2 = 5$, $v_2 = 4$ des deux façons.

— **Lecture matricielle** : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des **vecteurs propres** de A, de valeurs propres 3 et 1 — c'est ce qui rend le système « diagonal » dans cette nouvelle base.

Réponse. b) $u_n = \dfrac{3^n + 1}{2}$, $v_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).