Plaquette 4 – Matrices inversibles et calcul d'inverses

Matrices — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Inversibilité.

— $A \in M_n(\mathrm{K})$ est inversible $\Leftrightarrow$ il existe B carrée avec $AB = I_n \Leftrightarrow AX = 0 \Rightarrow X = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rg} A = n$.

— **Groupe linéaire** $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}}$, $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

— **Taille** 2 : si $ad - bc \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

— **Gauss-Jordan** : les opérations sur les lignes qui transforment A en I_n transforment I_n en A^{-1}.

— **Polynôme annulateur** : si $a_k A^k + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0$ avec $a_0 \neq 0$, alors $A \times \left(-\frac{1}{a_0}(a_k A^{k-1} + \ldots + a_1 I)\right) = I$.

— **Triangulaire** : inversible $\Leftrightarrow$ diagonale sans zéro ; l'inverse est triangulaire de même type.

— **Blocs** : $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$ si A et D sont inversibles.

Correction de l'exercice 1 – Gauss-Jordan en taille 3

a) On effectue les mêmes opérations sur A et sur I_3 :

— $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: $(0,1,1 \mid -2,1,0)$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$: $(0,1,2 \mid -1,0,1)$.

— $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$: $(0,0,1 \mid 1,-1,1)$.

— $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$: $(0,1,0 \mid -3,2,-1)$; $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$: $(1,2,0 \mid 0,1,-1)$.

— $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$: $(1,0,0 \mid 6,-3,1)$.

La partie gauche est devenue I_3 (trois pivots) : A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Ligne 1 de A fois les colonnes : $6-6+1=1$, $-3+4-1=0$, $1-2+1=0$ ✓. Ligne 3 : $6-9+3=0$, $-3+6-3=0$, $1-3+3=1$ ✓.

c) $X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est la **première colonne** de A^{-1} : $X = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Réponse. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $X = (6,-3,1)^{\mathsf{T}}$.

Correction de l'exercice 2 – Inverse avec un paramètre en taille 2

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) $ad - bc = a^2 - 1$. Si $a \neq \pm 1$, la formule de la taille 2 donne

$$A_a^{-1} = \frac{1}{a^2-1}\begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

— Si $a = \pm 1$, les deux colonnes sont proportionnelles ($C_2 = \pm C_1$) : non inversible.

b) $a = 1$: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vérifie $A_1 X = 0$; c'est la preuve directe de la non-inversibilité (si A_1^{-1} existait, $X = A_1^{-1}0 = 0$).

c) $a = 2$: $A_2^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-5 \\ -1+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

— Vérification : $-2 + 3 = 1$ et $-1 + 6 = 5$ ✓.

Réponse. Inversible $\Leftrightarrow a \neq \pm 1$, $A_a^{-1} = \frac{1}{a^2-1}\begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$; $X = (1, -1)^{\mathsf{T}}$; $(x, y) = (-1, 3)$.

Correction de l'exercice 3 – Inverse par un polynôme annulateur

a) On développe avec $J^2 = nJ$ puis $J = A + I_n$:

$$A^2 = J^2 - 2J + I_n = (n-2)J + I_n = (n-2)A + (n-1)I_n$$

b) $A(A - (n-2)I_n) = (n-1)I_n$ avec $n - 1 \neq 0$:

— $A^{-1} = \frac{1}{n-1}(A - (n-2)I_n)$: coefficients diagonaux $-\frac{n-2}{n-1}$, autres coefficients $\frac{1}{n-1}$.

c) $n = 3$: $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Contrôle : ligne 1 de $A = (0, 1, 1)$ fois la colonne 1 : $\frac{1}{2}(0 + 1 + 1) = 1$; fois la colonne 2 : $\frac{1}{2}(0 - 1 + 1) = 0$ ✓.

d) $n = 1$: $A = (0)$, non inversible ; la relation devient $A^2 = -A$, de terme constant nul, et ne donne rien.

Réponse. $A^2 = (n-2)A + (n-1)I_n$; $A^{-1} = \frac{A - (n-2)I_n}{n-1}$; pour $n = 3$: $\frac{1}{2}(A - I_3)$.

Correction de l'exercice 4 – Inverse d'une matrice triangulaire

a) $TX = Y$ s'écrit $x_1 + ax_2 + bx_3 = y_1$, $x_2 + cx_3 = y_2$, $x_3 = y_3$. On remonte :

— $x_3 = y_3$, $x_2 = y_2 - cy_3$, $x_1 = y_1 - a(y_2 - cy_3) - by_3 = y_1 - ay_2 + (ac - b)y_3$.

Solution unique pour tout Y : T est inversible et

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) C'est visible ; la première ligne de TT^{-1} vaut $(1, -a + a, ac - b - ac + b) = (1, 0, 0)$ ✓.

c) $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = acE_{13}$, $N^3 = 0$, et $(I + N)(I - N + N^2) = I + N^3 = I$. Donc $T^{-1} = I - N + N^2$, dont le coefficient $(1, 3)$ vaut $-b + ac$ ✓.

Réponse. $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I - N + N^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – AB = I suffit pour des matrices carrées

a) Si $BX = 0$, alors $X = I_n X = A(BX) = A0 = 0$. Par le résultat admis (qui repose sur le rang), B est inversible.

b) On multiplie $AB = I_n$ à droite par B^{-1} :

$$A = ABB^{-1} = B^{-1}$$

— donc $BA = BB^{-1} = I_n$.

c) $AB = (1) = I_1$, mais $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$.

Portée : pour vérifier qu'une matrice **carrée** est l'inverse d'une autre, un seul produit suffit — c'est ce qu'on fait dans toutes les vérifications de ce chapitre.

Réponse. $BX = 0 \Rightarrow X = 0$, donc B inversible et $A = B^{-1}$, $BA = I_n$; contre-exemple non carré.

Correction de l'exercice 6 – Diagonale strictement dominante

a) La ligne i donne $a_{ii}x_i = -\sum_{j \neq i} a_{ij}x_j$, donc, avec $|x_j| \leq |x_i|$:

$$|a_{ii}|\,|x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\,|x_j| \leq \left(\sum_{j \neq i} |a_{ij}|\right)|x_i|$$

— Comme $|x_i| > 0$ ($X \neq 0$), on divise : $|a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, contredisant l'hypothèse.

b) Donc $AX = 0 \Rightarrow X = 0$: A est inversible (théorème d'Hadamard).

c) $3 > 1 + 1$, $4 > 1 + 1$, $5 > 1 + 1$: inversible. La première colonne C de A^{-1} vérifie $AC = e_1$:

— $\frac{1}{50}(57 - 4 - 3) = 1$, $\frac{1}{50}(19 - 16 - 3) = 0$, $\frac{1}{50}(19 - 4 - 15) = 0$ ✓.

Réponse. Une solution non nulle contredirait la dominance sur la ligne du plus grand $|x_i|$; A inversible ; première colonne $\frac{1}{50}(19, -4, -3)^{\mathsf{T}}$ vérifiée.

Correction de l'exercice 7 – La matrice de Pascal

a) La colonne j de P contient les coefficients de $(X + 1)^{j-1} = \sum_i \binom{j-1}{i-1} X^{i-1}$: l'image de X^{j-1}. Par linéarité, P envoie les coefficients de Q sur ceux de $Q(X + 1)$.

b) Remplacer X par $X + 1$ puis par $X - 1$ redonne Q : la matrice de $Q \mapsto Q(X - 1)$ est l'inverse. Ses colonnes sont les coefficients de $(X - 1)^{j-1}$:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— (coefficient (i, j) égal à $(-1)^{i+j}\binom{j-1}{i-1}$).

c) Ligne 2 de P : $(0, 1, 2, 3)$. Produits avec les colonnes de P^{-1} : 0 ; 1 ; $-2 + 2 = 0$; $3 - 6 + 3 = 0$: on obtient $(0, 1, 0, 0)$ ✓.

Réponse. $P : Q \mapsto Q(X + 1)$; $P^{-1} : Q \mapsto Q(X - 1)$, coefficients $(-1)^{i+j}\binom{j-1}{i-1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Inverse de I + uv^S

a) Par associativité, $uv^{\mathsf{T}}uv^{\mathsf{T}} = u(v^{\mathsf{T}}u)v^{\mathsf{T}} = \lambda uv^{\mathsf{T}}$.

b) Avec $M = uv^{\mathsf{T}}$:

$$(I+M)(I+\alpha M) = I + (1+\alpha+\alpha\lambda)M$$

— il suffit que $1+\alpha(1+\lambda)=0$, soit $\alpha = -\frac{1}{1+\lambda}$: $(I+uv^{\mathsf{T}})^{-1} = I - \frac{uv^{\mathsf{T}}}{1+v^{\mathsf{T}}u}$ (formule de Sherman-Morrison).

c) $uv^{\mathsf{T}} = J$, $\lambda = 3$: $(I_3+J)^{-1} = I_3 - \frac{1}{4}J$, de diagonale $\frac{3}{4}$ et de coefficients hors diagonale $-\frac{1}{4}$. Contrôle : $(I+J)(I-\frac{J}{4}) = I + J - \frac{J}{4} - \frac{3J}{4} = I$ ✓.

d) Si $\lambda = -1$: $(I+M)u = u + u(v^{\mathsf{T}}u) = u - u = 0$ avec $u \neq 0$: $I+M$ n'est **pas** inversible. Exemple : $u = (1,0)^{\mathsf{T}}$, $v = (-1,0)^{\mathsf{T}}$ donnent $I_2 + uv^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Réponse. $(I+uv^{\mathsf{T}})^{-1} = I - \frac{uv^{\mathsf{T}}}{1+v^{\mathsf{T}}u}$; $(I_3+J)^{-1} = I_3 - \frac{J}{4}$; non inversible si $v^{\mathsf{T}}u = -1$.

Correction de l'exercice 9 – Le groupe des matrices inversibles

a) On vérifie un seul produit (matrices carrées) :

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

b) $A^{\mathsf{T}}(A^{-1})^{\mathsf{T}} = (A^{-1}A)^{\mathsf{T}} = I_n^{\mathsf{T}} = I_n$.

c) Non : I_n et $-I_n$ sont inversibles, leur somme est nulle. $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ est un groupe pour le **produit**, pas un sous-espace.

d) A^{-1} commute avec N (multiplier $AN = NA$ à gauche et à droite par A^{-1}), donc $(A^{-1}N)^p = A^{-p}N^p = 0$: $M = A^{-1}N$ est nilpotente, et $I+M$ est inversible d'inverse $\sum_{k<p}(-M)^k$. Alors $A+N = A(I+M)$ est un produit d'inversibles.

— Exemple : $A = 2I_2$, $N = E_{12}$: $A+N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, inversible.

Réponse. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}}$; $I_n + (-I_n) = 0$; $A+N = A(I+A^{-1}N)$ inversible.

Correction de l'exercice 10 – Inverse d'une matrice triangulaire par blocs

a) Le produit par blocs donne

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX & AY+BZ \\ 0 & DZ \end{pmatrix}$$

— et l'on veut $AX = I_p$, $DZ = I_q$, $AY+BZ = 0$: $X = A^{-1}$, $Z = D^{-1}$, $Y = -A^{-1}BD^{-1}$. Ce produit vaut I_{p+q} : M est inversible (un seul produit suffit).

b) $A = \mathrm{diag}(2,1)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— $BD^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $-A^{-1}BD^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Contrôle, ligne 1 de M fois la colonne 3 : $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times 1 = 0$ ✓ ; fois la colonne 4 : $0 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$ ✓.

Réponse. $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$; exemple : $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l’exercice 11 – Inversibilité selon un paramètre en taille 3

a) $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne $(0, a-1, 1)$. Deux cas.

— Si $a = 1$: $L_2 = (0, 0, 1)$; on l’échange avec $L_3 = (0, 1, 1)$: trois pivots, inversible.

— Si $a \neq 1$: $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{a-1} L_2$ donne $\left(0, 0, 1 - \frac{1}{a-1}\right) = \left(0, 0, \frac{a-2}{a-1}\right)$.

$$A_a \text{ inversible} \Leftrightarrow a \neq 2$$

b) $a = 2$: $L_2 = L_1 + L_3$. Et $X = (1, -1, 1)^{\mathsf{T}}$ vérifie $A_2 X = (0,\ 1 - 2 + 1,\ 0) = 0$.

c) Gauss-Jordan pour $a = 3$ donne $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

— Contrôle : ligne 2 de A_3, $(1, 3, 1)$, fois les colonnes : $2 - 3 + 1 = 0$, $-1 + 3 - 1 = 1$, $1 - 3 + 2 = 0$ ✓.

Réponse. Inversible $\Leftrightarrow a \neq 2$; pour $a = 2$, $L_2 = L_1 + L_3$ et $X = (1, -1, 1)^{\mathsf{T}}$; $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction de l’exercice 12 – Nilpotence et inversibilité

a) Si N était inversible, N^p le serait aussi (produit d’inversibles), or $N^p = 0$.

b) I et N commutent et $N^p = 0$:

$$(I - N) \sum_{k=0}^{p-1} N^k = I - N^p = I, \qquad (I + N) \sum_{k=0}^{p-1} (-N)^k = I - (-N)^p = I$$

c) $I + N + N^2 = I + M$ avec $M = N + N^2$ nilpotente (M commute avec N et $M^p = N^p (I+N)^p = 0$). Donc inversible. Pour $p = 3$: $M^2 = N^2$ et $M^3 = 0$, d’où

— $(I + M)^{-1} = I - M + M^2 = I - N - N^2 + N^2 = I - N$.

— En effet $(I + N + N^2)(I - N) = I - N^3 = I$ ✓.

d) $(I_3 + N + N^2)^{-1} = I_3 - N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Réponse. N non inversible ; $(I \mp N)^{-1} = \sum (\pm N)^k$; pour $p = 3$: $(I + N + N^2)^{-1} = I - N$.

Correction de l’exercice 13 – Équations AX = B et XA = B

a) $ad - bc = 3 - 2 = 1$: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) On multiplie du **bon côté** par A^{-1} :

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B, \qquad XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1}$$

— $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3-2 & -2 \\ -1+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— $BA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3-1 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Non : $A^{-1}B \neq BA^{-1}$ en général, le produit n'étant pas commutatif. On n'écrit **jamais** $X = \frac{B}{A}$.

d) $AXA = I \Leftrightarrow X = A^{-1}A^{-1} = A^{-2} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. Contrôle :

$\det A^{-2} = 33 - 32 = 1$ ✓.

Réponse. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $AX = B$: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $XA = B$: $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $X = A^{-2} = \begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 14 – Matrice de Vandermonde et interpolation

a) La ligne i du produit vaut $c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 = Q(x_i)$.

b) La colonne j de V^{-1} est la solution C de $VC = e_j$: ce sont les coefficients du polynôme qui vaut 1 en x_j et 0 ailleurs, c'est-à-dire L_j.

c) $L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{2} = 1 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}X^2$, $L_1 = -X(X-2) = 2X - X^2$, $L_2 = \frac{X(X-1)}{2} = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2$:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

— Contrôle : ligne 3 de V, $(1, 2, 4)$, fois les colonnes : $1 - 3 + 2 = 0$, $4 - 4 = 0$, $-1 + 2 = 1$ ✓.

d) $C = V^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} + 6 - 1 \\ \frac{1}{2} - 3 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$: $Q = 1 + \frac{7}{2}X - \frac{3}{2}X^2$ (comme dans le chapitre sur les polynômes).

Réponse. Colonnes de V^{-1} = coefficients de L_0, L_1, L_2 ; $V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$; $Q = 1 + \frac{7}{2}X - \frac{3}{2}X^2$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : une corde tendue discrétisée

a) $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1$: $\left(0, \frac{3}{2}, -1\right)$; $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{3}L_2$: $\left(0, 0, \frac{4}{3}\right)$. Pivots $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$, tous non nuls : A est inversible.

b) On vérifie $A \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = I_3$ ligne par ligne :

— ligne $(2, -1, 0)$: $\frac{1}{4}(6 - 2,\ 4 - 4,\ 2 - 2) = (1, 0, 0)$;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— ligne $(-1,2,-1)$: $\frac{1}{4}(-3+4-1,\ -2+8-2,\ -1+4-3) = (0,1,0)$;

— ligne $(0,-1,2)$: $\frac{1}{4}(-2+2,\ -4+4,\ -2+6) = (0,0,1)$ ✓.

c) $X = A^{-1}b = \frac{1}{4}(3+2+1,\ 2+4+2,\ 1+2+3) = \left(\frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$: la corde descend le plus **au milieu**, symétriquement.

$$X = \left(\frac{3}{2},\ 2,\ \frac{3}{2}\right)^{\mathsf{T}}$$

d) Tous les coefficients de A^{-1} sont **positifs** : $x_i = \sum_j (A^{-1})_{ij} b_j \geq 0$. Une charge vers le bas fait descendre tous les points : propriété physique naturelle, que la matrice A (à coefficients hors diagonale négatifs) ne laisse pas voir.

e) $n+1 = 4$: $(1,1)$: $\frac{1\times 3}{4} = \frac{3}{4}$ ✓ ; $(1,2)$: $\frac{1\times 2}{4} = \frac{2}{4}$ ✓ ; $(1,3)$: $\frac{1\times 1}{4}$ ✓ ; $(2,2)$: $\frac{2\times 2}{4} = 1$ ✓ ; les autres par symétrie.

Réponse. Pivots $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$; $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $X = \left(\frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$; $A^{-1} \geq 0$ donc charge positive ⇒ déplacements positifs.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).