Plaquette 2 – Produit matriciel, matrices remarquables et trace

Matrices — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Produit et structures.

— $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$; la colonne j de AB est $A\,C_j(B)$, la ligne i est $L_i(A)\,B$.

— **Matrices élémentaires** : $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

— **Diagonales** : DM multiplie la ligne i de M par d_i ; MD multiplie la colonne j par d_j.

— **Triangulaires supérieures** : stables par produit, et la diagonale du produit est le produit des diagonales.

— **Transposée** : $(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}$; S symétrique si $S^{\mathsf{T}} = S$, A antisymétrique si $A^{\mathsf{T}} = -A$.

— **Trace** : $\mathrm{tr}A = \sum_i a_{ii}$, linéaire, et

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \qquad \text{(mais en général } \mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(ACB)\text{)}$$

— **Rotation** : $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $R(\theta)R(\varphi) = R(\theta+\varphi)$.

— **Colonne-ligne** : pour $X, Y \in M_{n,1}$, $Y^{\mathsf{T}}X$ est un scalaire et XY^{T} une matrice $n \times n$.

Correction de l’exercice 1 – Colonne fois ligne, ligne fois colonne

a) $Y^{\mathsf{T}}X = 1 - 2 + 6 = 5$ (matrice 1×1, identifiée à un scalaire), et

$$M = XY^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Par associativité, $M^2 = X(Y^{\mathsf{T}}X)Y^{\mathsf{T}} = 5\,XY^{\mathsf{T}} = 5M$. Par récurrence, $M^n = 5^{n-1}M$ pour $n \geq 1$.

— Contrôle : le coefficient $(1,1)$ de M^2 vaut $1 \times 1 + (-1) \times 2 + 2 \times 3 = 5 = 5 \times 1$ ✓.

c) Toutes les colonnes de M sont proportionnelles à X (la colonne j vaut $y_j X$) : $\mathrm{rg}M = 1$.

— $\mathrm{tr}M = 1 - 2 + 6 = 5 = Y^{\mathsf{T}}X$, ce qui illustre $\mathrm{tr}(XY^{\mathsf{T}}) = \mathrm{tr}(Y^{\mathsf{T}}X)$.

Réponse. $Y^{\mathsf{T}}X = 5$; $M^n = 5^{n-1}M$; $\mathrm{rg}M = 1$, $\mathrm{tr}M = 5$.

Correction de l’exercice 2 – Calcul par blocs

a) Le coefficient (i,j) du produit est $\sum_k a_{ik}b_{kj}$; en coupant la somme sur k en deux paquets correspondant aux blocs de colonnes, on obtient

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{pmatrix}$$

— les blocs ne commutant pas, l’ordre des facteurs doit être respecté.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} I & B+B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 2B \\ 0 & I \end{pmatrix}$, et par récurrence $A^n = \begin{pmatrix} I & nB \\ 0 & I \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -B+B \\ 0 & I \end{pmatrix} = I_4$: $A^{-1} = \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix}$ (c’est « A^n pour $n = -1$ »).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Réponse. $A^n = \begin{pmatrix} I & nB \\ 0 & I \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3 – Commutant d'une matrice diagonale

a) Multiplier à gauche par D multiplie les **lignes**, à droite les **colonnes** :

$$(DM)_{ij} = d_i m_{ij}, \qquad (MD)_{ij} = m_{ij} d_j$$

b) $DM = MD \Leftrightarrow (d_i - d_j)m_{ij} = 0$ pour tous i, j. Ici les d_i sont **distincts** : pour $i \neq j$, $m_{ij} = 0$. Les matrices qui commutent avec D sont les matrices **diagonales**.

c) Avec $D' = \mathrm{diag}(1, 1, 3)$: $d_1 = d_2$, donc m_{12} et m_{21} sont libres, tandis que $m_{13} = m_{31} = m_{23} = m_{32} = 0$. Le commutant est

— $\left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \right\}$, de dimension 5 (au lieu de 3).

Lecture : plus les valeurs diagonales se répètent, plus le commutant est gros ; pour λI_3, c'est tout $M_3(\mathbb{R})$.

Réponse. $(DM)_{ij} = d_i m_{ij}$, $(MD)_{ij} = m_{ij} d_j$; commutant de $\mathrm{diag}(1, 2, 3)$: les diagonales ; de $\mathrm{diag}(1, 1, 3)$: les matrices diagonales par blocs $2 + 1$.

Correction de l'exercice 4 – Matrices triangulaires supérieures

a) A triangulaire supérieure signifie $a_{ik} = 0$ pour $k < i$. Dans $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$, un terme non nul exige $i \leq k$ et $k \leq j$. Si $i > j$, aucun k ne convient : $(AB)_{ij} = 0$. Si $i = j$, seul $k = i$ reste :

$$(AB)_{ii} = a_{ii} b_{ii}$$

b) Par récurrence : les coefficients non nuls de N^k sont en position (i, j) avec $j \geq i + k$. C'est vrai pour $k = 1$; et $(N^{k+1})_{ij} = \sum_l (N^k)_{il} n_{lj}$ exige $l \geq i + k$ et $j \geq l + 1$, donc $j \geq i + k + 1$. Pour $k = n$, $j \geq i + n > n$ est impossible : $N^n = 0$.

c) C'est b). Pour l'exemple : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$; la « diagonale non nulle » recule d'un cran à chaque puissance.

Réponse. T_n stable, diagonale du produit = produit des diagonales ; strictement triangulaire $\Rightarrow N^n = 0$; exemple : $N^2 = E_{13}$, $N^3 = 0$.

Correction de l'exercice 5 – Matrices de permutation

a) Les colonnes de C sont les images : $Ce_1 = e_2$, $Ce_2 = e_3$, $Ce_3 = e_1$. C **permute circulairement** les vecteurs de base.

b) C^2 envoie $e_1 \mapsto e_3$, $e_2 \mapsto e_1$, $e_3 \mapsto e_2$: $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $C^3 = I_3$ (trois décalages ramènent chaque vecteur à sa place).

— $C \times C^2 = I_3$, donc $C^{-1} = C^2$. $2026 = 3 \times 675 + 1$: $C^{2026} = C$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $C^{\mathsf{T}} = C^2$ (on lit la transposée), donc $C^{\mathsf{T}}C = C^3 = I_3$: une matrice de permutation a pour inverse sa transposée,

$$C^{-1} = C^{\mathsf{T}}$$

d) La ligne i de CM est $L_i(C)M$: CM a pour lignes $L_3(M)$, $L_1(M)$, $L_2(M)$. La colonne j de MC est MCe_j : MC a pour colonnes $C_2(M)$, $C_3(M)$, $C_1(M)$.

Réponse. $Ce_1 = e_2$, $Ce_2 = e_3$, $Ce_3 = e_1$; $C^3 = I_3$, $C^{-1} = C^2 = C^{\mathsf{T}}$, $C^{2026} = C$.

Correction de l'exercice 6 – Matrices de rotation

a) Le produit donne, par les formules d'addition :

$$R(\theta)R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & -(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix} = R(\theta+\varphi)$$

— et $R(\theta+\varphi) = R(\varphi+\theta)$: elles commutent.

b) Par récurrence, $R(\theta)^n = R(n\theta)$; $R(\theta)R(-\theta) = R(0) = I_2$, donc $R(\theta)^{-1} = R(-\theta) = R(\theta)^{\mathsf{T}}$.

c) $R\left(\frac{2\pi}{5}\right)^n = R\left(\frac{2n\pi}{5}\right) = I_2 \Leftrightarrow \frac{2n\pi}{5} \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow 5 \mid n$: $n = 5$.

— $R\left(\frac{4\pi}{6}\right)^n = I_2 \Leftrightarrow \frac{2n\pi}{3} \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow 3 \mid n$: $n = 3$ (l'angle $\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$).

d) Oui : $R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $R\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = R(\pi) = -I_2$. Dans $M_2(\mathbb{R})$, « -1 a une racine carrée » — c'est la matrice de la multiplication par i.

Réponse. $R(\theta)R(\varphi) = R(\theta+\varphi)$; $R(\theta)^n = R(n\theta)$, $R(\theta)^{-1} = R(\theta)^{\mathsf{T}}$; $n = 5$ et $n = 3$; $M = R(\pi/2)$.

Correction de l'exercice 7 – Propriétés de la trace

a) On applique $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$ avec $X = A$, $Y = BC$, puis avec $X = AB$, $Y = C$:

$$\operatorname{tr}(A(BC)) = \operatorname{tr}((BC)A), \qquad \operatorname{tr}((AB)C) = \operatorname{tr}(C(AB))$$

— la trace est invariante par **permutation circulaire**.

b) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $ABC = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$: trace 6. $AC = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ et $ACB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$: trace 9. Donc $\operatorname{tr}(ABC) \neq \operatorname{tr}(ACB)$ en général : seules les permutations **circulaires** sont permises.

c) $(A^{\mathsf{T}}A)_{jj} = \sum_i (A^{\mathsf{T}})_{ji}a_{ij} = \sum_i a_{ij}^2$; en sommant sur j : $\operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}}A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2$. Si $A^{\mathsf{T}}A = 0$, cette somme de carrés réels est nulle : tous les a_{ij} sont nuls.

d) $\operatorname{tr}(P^{-1}(AP)) = \operatorname{tr}((AP)P^{-1}) = \operatorname{tr}A$.

Réponse. Invariance circulaire ; $\operatorname{tr}(ABC) = 6 \neq 9 = \operatorname{tr}(ACB)$; $\operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}}A) = \sum a_{ij}^2$; $\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}A$.

Correction de l'exercice 8 – Matrices symétriques et antisymétriques

a) $(A^{\mathsf{T}}A)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}}(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}}A$, et de même pour AA^{T}.

b) La transposée d'un produit renverse l'ordre :

$$(SS')^{\mathsf{T}} = S'^{\mathsf{T}}S^{\mathsf{T}} = S'S$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— donc SS' est symétrique $\Leftrightarrow SS' = S'S$. Contre-exemple : $S = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $S' = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ donnent $SS' = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, non symétrique.

c) $a_{ii} = -a_{ii}$ donne $a_{ii} = 0$. Le réel $x^{\mathsf{T}}Ax$ est égal à sa transposée : $x^{\mathsf{T}}Ax = x^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}x = -x^{\mathsf{T}}Ax$, donc il est nul.

d) Pour S_n : les coefficients sur et au-dessus de la diagonale, soit $\frac{n(n+1)}{2}$. Pour A_n : ceux strictement au-dessus, soit $\frac{n(n-1)}{2}$. Total n^2, cohérent avec $A = \frac{A+A^{\mathsf{T}}}{2} + \frac{A-A^{\mathsf{T}}}{2}$.

Réponse. $A^{\mathsf{T}}A$ symétrique ; SS' symétrique $\Leftrightarrow SS' = S'S$; diagonale nulle et $x^{\mathsf{T}}Ax = 0$; $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$ coefficients.

Correction de l’exercice 9 – Résoudre X² = 0 et X² = I₂

a) Relation de Cayley-Hamilton en taille 2, vérifiée par le calcul :

$$X^2 = \begin{pmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\ c(a+d) & d^2+bc\end{pmatrix} = (a+d)X - (ad-bc)I_2$$

— (coefficient $(1,1)$: $(a+d)a - ad + bc = a^2 + bc$ ✓).

b) Si $X^2 = 0$ et $X \neq 0$: alors $(a+d)X = (ad-bc)I_2$. Si $a+d \neq 0$, X serait scalaire, $X = \lambda I_2$ avec $\lambda^2 = 0$, absurde. Donc $a+d = 0$ et $ad - bc = 0$:

— $X = \begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$ avec $a^2 + bc = 0$ (réciproquement ces matrices vérifient $X^2 = 0$ par a)). Exemple : $\begin{pmatrix}2&4\\-1&-2\end{pmatrix}$.

c) Si $X \neq \pm I_2$: de a), $(a+d)X = (ad-bc+1)I_2$; X non scalaire impose $a+d = 0$ et $ad - bc = -1$, soit $a^2 + bc = 1$.

— Solutions : $\pm I_2$ et les $\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$ avec $a^2 + bc = 1$, par exemple $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ (des symétries).

Réponse. $X^2 = \operatorname{tr}(X)X - (ad-bc)I_2$; $X^2 = 0 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$, $a^2 + bc = 0$; $X^2 = I_2 \Leftrightarrow X = \pm I_2$ ou trace nulle et $a^2 + bc = 1$.

Correction de l’exercice 10 – La matrice dont tous les coefficients valent 1

a) $(J^2)_{ij} = \sum_k 1 \times 1 = n$: $J^2 = nJ$. Par récurrence, $J^k = n^{k-1}J$ $(k \geq 1)$.

b) Par distributivité et a) :

$$(aI + bJ)(cI + dJ) = acI + (ad + bc + nbd)J$$

— le résultat est de la même forme, et l’expression est symétrique en (a,b) et (c,d) : ces matrices commutent.

c) I et J commutent, donc

— $(I+J)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} J^j = I + \left(\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} n^{j-1}\right) J = I + \frac{(1+n)^k - 1}{n} J$.

— Contrôle $k=1$: $I + \frac{n}{n}J = I + J$ ✓ ; $k=2$: $I + (n+2)J$, et $(I+J)^2 = I + 2J + nJ$ ✓.

Réponse. $J^k = n^{k-1}J$; $(aI+bJ)(cI+dJ) = acI + (ad+bc+nbd)J$; $(I+J)^k = I + \frac{(n+1)^k - 1}{n} J$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Matrices stochastiques

a) La ligne i de AU vaut $\sum_j a_{ij} \times 1$: c'est la somme de la ligne i. Donc « toutes les lignes somment à 1 » $\Leftrightarrow AU = U$.

b) Les coefficients de AB sont des sommes de produits de réels positifs : positifs. Et

$$(AB)U = A(BU) = AU = U$$

— donc AB est stochastique ; par récurrence, A^k aussi.

c) En ordonnant (bonne, mauvaise) : $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et

— $A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}64 + 0{,}08 & 0{,}16 + 0{,}12 \\ 0{,}32 + 0{,}24 & 0{,}08 + 0{,}36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}72 & 0{,}28 \\ 0{,}56 & 0{,}44 \end{pmatrix}$; lignes de somme 1 ✓.

— $(A^2)_{11} = 0{,}72$ est la probabilité d'être de bonne humeur dans deux jours sachant qu'on l'est aujourd'hui : on somme sur l'humeur du lendemain ($0{,}8 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}4$).

Réponse. Stochastique $\Leftrightarrow AU = U$ (et coefficients positifs) ; stable par produit ; $A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}72 & 0{,}28 \\ 0{,}56 & 0{,}44 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 12 – Matrices idempotentes

a) I et P commutent : $(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$, et $P(I - P) = P - P^2 = 0$.

b) $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P$ pour **tout** a (projection sur l'axe des abscisses parallèlement à une direction qui dépend de a).

c) Avec la relation de Cayley-Hamilton en taille 2 et $P^2 = P$:

$$P = \operatorname{tr}(P)P - \det(P)I_2 \Rightarrow (\operatorname{tr}(P) - 1)P = \det(P)I_2$$

— Si $\operatorname{tr}P \neq 1$, P serait scalaire, $P = \lambda I_2$ avec $\lambda^2 = \lambda$, donc $P = 0$ ou I_2 : exclu. Donc $\operatorname{tr}P = 1$ (et alors $\det P = 0$).

d) Si $P^2 = P$ et P inversible, on multiplie par P^{-1} : $P = I_n$.

Réponse. $I - P$ idempotente, $P(I - P) = 0$; b) tout a ; c) $\operatorname{tr}P = 1$; d) $P = I_n$.

Correction de l'exercice 13 – Commutateurs

a) Par linéarité de la trace et $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$:

$$\operatorname{tr}[A, B] = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0$$

— et $[B, A] = BA - AB = -[A, B]$.

b) Avec $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$:

— $[E_{12}, E_{21}] = E_{11} - E_{22}$; $[E_{11}, E_{12}] = E_{12} - 0 = E_{12}$; $[E_{21}, E_{11}] = E_{21} - 0 = E_{21}$.

c) Une matrice de trace nulle s'écrit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a(E_{11} - E_{22}) + bE_{12} + cE_{21}$, et par bilinéarité de $[\cdot, \cdot]$:

— $= [aE_{12}, E_{21}] + [bE_{11}, E_{12}] + [cE_{21}, E_{11}]$: somme de trois commutateurs.

d) En développant, $[A, [B, C]] = ABC - ACB - BCA + CBA$; les deux autres termes s'obtiennent par permutation circulaire $A \to B \to C \to A$. Les douze termes se regroupent par paires opposées (ABC apparaît avec $+$ dans le premier et $-$ dans le troisième, etc.) : la somme est nulle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\mathrm{tr}[A,B]=0$; $[E_{12},E_{21}]=E_{11}-E_{22}$, $[E_{11},E_{12}]=E_{12}$, $[E_{21},E_{11}]=E_{21}$; trace nulle = somme de commutateurs.

Correction de l'exercice 14 – Le produit n'est pas commutatif : conséquences

a) $A=E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=E_{21}$: $AB=E_{11}E_{21}=0$ et $BA=E_{21}E_{11}=E_{21}\neq 0$.

b) $A=E_{12}$: $A^2=0$. Avec $B=0$ et $C=E_{12}$, on a $AB=0=AC$ mais $B\neq C$: on ne simplifie que par une matrice **inversible**.

c) En développant sans permuter les facteurs :

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2,\qquad (A-B)(A+B)=A^2+AB-BA-B^2$$

— chaque identité remarquable équivaut à $AB+BA=2AB$, resp. $AB-BA=0$, c'est-à-dire à $AB=BA$.

d) Par récurrence, $AB^k=B^kA$; puis $A^2B^3=A(AB^3)=A(B^3A)=(AB^3)A=B^3A^2$.

Réponse. $E_{11}E_{21}=0\neq E_{21}E_{11}$; $E_{12}^2=0$; les identités remarquables équivalent à $AB=BA$; $A^2B^3=B^3A^2$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : les matrices circulantes

a) $bC=\begin{pmatrix}0&0&b\\b&0&0\\0&b&0\end{pmatrix}$ et $cC^2=\begin{pmatrix}0&c&0\\0&0&c\\c&0&0\end{pmatrix}$, donc

$$M(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&c&b\\b&a&c\\c&b&a\end{pmatrix}$$

— chaque ligne est la précédente décalée d'un cran vers la droite.

b) $M(a,b,c)=P(C)$ avec $P=a+bX+cX^2$. Le produit $P(C)Q(C)=(PQ)(C)$; et comme $C^3=I$, $C^4=C$, on peut remplacer PQ par son reste modulo X^3-1, de degré ≤ 2 : le produit est encore de la forme $M(\cdot)$. Deux polynômes en C commutent.

c) $(I+C)(I-C+C^2)=I+C^3=2I_3$, donc $(I+C)^{-1}=\frac{1}{2}(I-C+C^2)=\frac{1}{2}M(1,-1,1)$.

d) $(I-C)(I+C+C^2)=I-C^3=0$, avec $I+C+C^2=J\neq 0$. Si $I-C$ était inversible, on aurait $J=0$ en multipliant par l'inverse : absurde. $I-C$ est un **diviseur de zéro**.

e) $(1+X)^2=1+2X+X^2$ (déjà de degré 2), donc $M(1,1,0)^2=M(1,2,1)=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$.

Directement, la ligne 1 de $M(1,1,0)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ au carré vaut
$(1+0+0,\ 0+0+1,\ 1+0+1)=(1,1,2)$ ✓.

Réponse. $M(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&c&b\\b&a&c\\c&b&a\end{pmatrix}$; produit $\leftrightarrow$ polynômes modulo X^3-1 ; $(I+C)^{-1}=\frac{1}{2}(I-C+C^2)$; $I-C$ non inversible ; $M(1,1,0)^2=M(1,2,1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).