Plaquette 3 – Puissances de matrices et suites récurrentes

Matrices — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Puissances.

— **Binôme** : si $AB = BA$, $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$. Si $N^p = 0$, la somme s'arrête à $k = p-1$.

— **Polynôme annulateur** : si $P(A) = 0$ et $X^n = PQ_n + R_n$ (division euclidienne), alors

$$A^n = R_n(A)$$

— En taille 2 : $A^2 = \operatorname{tr}(A)A - \det(A) I_2$ (Cayley-Hamilton), avec $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

— **Factorisation** : $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$, et D^n se calcule coefficient diagonal par coefficient.

— **Suites** : $X_{n+1} = AX_n \Rightarrow X_n = A^n X_0$; une suite d'ordre p s'écrit ainsi avec $X_n = (u_{n+p-1}, \dots, u_n)^{\mathsf{T}}$.

— **Graphes** : si A est la matrice d'adjacence, $(A^k)_{ij}$ est le nombre de chemins de longueur k de i à j.

Correction de l'exercice 1 – Binôme avec une partie nilpotente

a) $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = 0$.

b) $3I_3$ commute avec N ; dans le binôme, les termes N^k avec $k \geq 3$ sont nuls :

$$A^n = 3^n I + n 3^{n-1} N + \binom{n}{2} 3^{n-2} N^2 = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

c) $n = 2$: la formule donne $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 1 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Directement, la première ligne de A^2 est $(3,1,0)A = (9,\ 3+3,\ 1) = (9,6,1)$ ✓.

Réponse. $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \binom{n}{2} 3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 2 – Puissances par un polynôme annulateur

a) $\operatorname{tr} A = 5$ et $\det A = 4 + 2 = 6$: Cayley-Hamilton donne $A^2 = 5A - 6I_2$. (Directement : $A^2 = \begin{pmatrix} 14 & -10 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = 5A - 6I_2$ ✓.)

b) $X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$; le reste $aX + b$ vérifie $2a + b = 2^n$ et $3a + b = 3^n$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $a = 3^n - 2^n$, $b = 3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n$.

c) $X^n = (X^2 - 5X + 6)Q + aX + b$; en remplaçant X par A et en utilisant a) :

$$A^n = (3^n - 2^n)A + (3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n)I_2 = \begin{pmatrix} 2\cdot 3^n - 2^n & 2^{n+1} - 2\cdot 3^n \\ 3^n - 2^n & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}$$

d) $n = 3$: $19A - 30I_2 = \begin{pmatrix} 46 & -38 \\ 19 & -11 \end{pmatrix}$. Directement, $A^3 = A\cdot A^2 = \begin{pmatrix} 56-10 & -40+2 \\ 14+5 & -10-1 \end{pmatrix}$, identique ✓.

Réponse. $A^n = (3^n - 2^n)A + (3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n)I_2$.

Correction de l’exercice 3 – La matrice de Fibonacci

a) $n = 1$: $F = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$ ✓. Si c’est vrai au rang n :

$$F^{n+1} = F^n F = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$$

b) Le coefficient $(1,2)$ de $F^{m+n} = F^m F^n$ vaut F_{m+n} d’un côté, $F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1}$ de l’autre. Avec $m = n$: $F_{2n} = F_{n+1}F_n + F_n F_{n-1}$.

c) $\det F = -1$, donc $\det F^n = (-1)^n$, et $\det F^n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$.

d) $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_{10} = 55$. b) : $5\times(8+3) = 55$ ✓. c) : $8\times 3 - 25 = -1 = (-1)^5$ ✓.

Réponse. $F^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$; $F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$; $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Correction de l’exercice 4 – Chemins sur un carré

a) $A = \begin{pmatrix} 0&1&0&1 \\ 1&0&1&0 \\ 0&1&0&1 \\ 1&0&1&0 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 2&0&2&0 \\ 0&2&0&2 \\ 2&0&2&0 \\ 0&2&0&2 \end{pmatrix}$.

— $(A^2)_{ij} = \sum_k a_{ik}a_{kj}$ compte les sommets k voisins de i et de j : c’est le nombre de chemins de longueur 2. De 1 à 1 : $1\to 2\to 1$ et $1\to 4\to 1$.

b) La première ligne de $A^3 = A^2 A$ vaut $(2,0,2,0)A = (0,4,0,4)$, soit 4 fois la première ligne de A ; de même pour les autres. Donc $A^3 = 4A$, et par récurrence

$$A^{2k+1} = 4^k A, \qquad A^{2k} = 4^{k-1}A^2 \quad (k \geq 1)$$

c) $(A^6)_{11} = 4^2 (A^2)_{11} = 32$ chemins fermés de longueur 6 ; $(A^5)_{12} = 4^2 a_{12} = 16$ chemins de longueur 5 de 1 à 2.

— Contrôle : $(A^6)_{11} + (A^6)_{13} = 64 = 2^6$, nombre total de chemins de longueur 6 issus de 1 ✓.

Réponse. $A^3 = 4A$; $A^{2k+1} = 4^k A$, $A^{2k} = 4^{k-1}A^2$; 32 chemins fermés de longueur 6, 16 chemins de longueur 5 de 1 à 2.

Correction de l’exercice 5 – Chaîne de Markov à deux états

a) $\mathrm{tr}A = 1{,}4$ et $\det A = 0{,}48 - 0{,}08 = 0{,}4$; Cayley-Hamilton donne $A^2 = 1{,}4A - 0{,}4I_2$.

b) $X^2 - 1{,}4X + 0{,}4 = (X-1)(X-0{,}4)$; le reste $aX + b$ de X^n vérifie $a + b = 1$ et $0{,}4a + b = 0{,}4^n$, d’où $0{,}6a = 1 - 0{,}4^n$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$A^n = \frac{1-0{,}4^n}{0{,}6}A + \left(1 - \frac{1-0{,}4^n}{0{,}6}\right)I_2$$

c) $0{,}4^n \to 0$, donc $a_n \to \frac{5}{3}$, $b_n \to -\frac{2}{3}$ et

— $A^n \to \frac{5}{3}A - \frac{2}{3}I_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}-\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1-\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

— Les deux lignes sont égales : à long terme, la probabilité d'être de bonne humeur est $\frac{2}{3}$, **quelle que soit** l'humeur de départ.

d) $\pi A = \left(\frac{2}{3}\times 0{,}8 + \frac{1}{3}\times 0{,}4,\ \frac{2}{3}\times 0{,}2 + \frac{1}{3}\times 0{,}6\right) = \left(\frac{1{,}6+0{,}4}{3},\ \frac{0{,}4+0{,}6}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ✓ : c'est la **loi stationnaire**.

Réponse. $A^n = a_nA + (1-a_n)I_2$, $a_n = \frac{1-0{,}4^n}{0{,}6}$; $A^n \to \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$; loi stationnaire $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 6 – Une similitude matricielle

a) $R\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc $A = \sqrt{2}\,R\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

b) Les scalaires commutent avec tout et $R(\theta)^n = R(n\theta)$:

$$A^n = 2^{n/2}R\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 2^{n/2}\begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{4} & -\sin\frac{n\pi}{4} \\ \sin\frac{n\pi}{4} & \cos\frac{n\pi}{4} \end{pmatrix}$$

— $A^4 = 4R(\pi) = -4I_2$ et $A^8 = 16R(2\pi) = 16I_2$.

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1-1 & -1-1 \\ 1+1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ✓, et $2A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ✓ (trace 2, déterminant 2).

d) A fait tourner de $\frac{\pi}{4}$ et multiplie les longueurs par $\sqrt{2}$: c'est la **similitude** $z \mapsto (1+\mathrm{i})z$ du plan complexe, et $(1+\mathrm{i})^8 = 16$.

Réponse. $A^n = 2^{n/2}R\left(\frac{n\pi}{4}\right)$; $A^4 = -4I_2$, $A^8 = 16I_2$; similitude d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 7 – Puissances d'une matrice par blocs

a) Le produit par blocs de deux matrices **diagonales par blocs** se fait bloc par bloc :

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BB' & 0 \\ 0 & cc' \end{pmatrix}$$

— d'où, par récurrence, $A^n = \begin{pmatrix} B^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

b) $B = 2I_2 + N$ avec $N = E_{12}$, $N^2 = 0$, et $2I_2$ commute avec N :
$B^n = 2^nI_2 + n2^{n-1}N = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

c) $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$. En divisant par 3^n : $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ et $\frac{n}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ (croissances comparées), donc

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\frac{A^n}{3^n} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{33}$: la plus grande valeur diagonale impose la croissance.

Réponse. $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$; $\frac{A^n}{3^n} \to E_{33}$.

Correction de l'exercice 8 – Suite arithmético-géométrique et matrice

a) Le produit donne $\begin{pmatrix} au_n + b \\ 1 \end{pmatrix}$: c'est bien $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix}$. L'ajout de la coordonnée constante 1 rend la relation **linéaire**.

b) Vrai pour $n = 1$. Si c'est vrai au rang n :

$$M^{n+1} = M^n M = \begin{pmatrix} a^{n+1} & a^n b + b\frac{a^n - 1}{a - 1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— et $a^n + \frac{a^n - 1}{a - 1} = \frac{a^{n+1} - a^n + a^n - 1}{a - 1} = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$ ✓.

c) $u_n = a^n u_0 + b\frac{a^n - 1}{a - 1} = a^n(u_0 - \ell) + \ell$ avec $\ell = \frac{b}{1 - a}$ (car $b\frac{a^n - 1}{a - 1} = \ell(1 - a^n)$).

d) $\ell = \frac{3}{0{,}5} = 6$: $u_n = 4 \times 0{,}5^n + 6 \to 6$. Contrôle : $u_1 = 5 + 3 = 8$ et $4 \times 0{,}5 + 6 = 8$ ✓.

Réponse. $M^n = \begin{pmatrix} a^n & b\frac{a^n - 1}{a - 1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$; $u_n = 4 \times 0{,}5^n + 6 \to 6$.

Correction de l'exercice 9 – Puissances d'une matrice de rang 1

a) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}(1 \;\; 2)$. Alors $A^2 = X(Y^{\mathsf{T}}X)Y^{\mathsf{T}}$ avec $Y^{\mathsf{T}}X = 2 + 2 = 4 = \operatorname{tr}A$:

$$A^2 = 4A$$

b) Par récurrence, $A^n = 4^{n-1}A$.

c) I_2 commute avec A :

— $(I_2 + A)^n = I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^{k-1} A = I_2 + \frac{(1+4)^n - 1}{4} A = I_2 + \frac{5^n - 1}{4} A$.

d) $n = 2$: $I_2 + 6A = \begin{pmatrix} 13 & 24 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$. Directement, $I_2 + A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et son carré vaut $\begin{pmatrix} 9+4 & 12+12 \\ 3+3 & 4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 24 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$ ✓.

Réponse. $A^2 = 4A$, $A^n = 4^{n-1}A$; $(I_2 + A)^n = I_2 + \frac{5^n - 1}{4} A$.

Correction de l'exercice 10 – Suite récurrente d'ordre 3

a) La première ligne traduit la récurrence, les deux autres « décalent » :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $P = X^2(X - 2) - (X - 2) = (X - 2)(X - 1)(X + 1)$, racines $1, -1, 2$. Les conditions initiales donnent le système

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha-\beta+2\gamma=2$, $\alpha+\beta+4\gamma=6$.
— La première et la troisième donnent $3\gamma=3$, $\gamma=1$; puis $\alpha+\beta=2$ et $\alpha-\beta=0$: $\alpha=\beta=1$.

$u_n=1+(-1)^n+2^n$.

c) Récurrence : $u_3=2\times6+2-2\times3=8$; $u_4=2\times8+6-2\times2=18$. Formule : $u_3=1-1+8=8$ ✓, $u_4=1+1+16=18$ ✓.

Réponse. $C=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$; $u_n=1+(-1)^n+2^n$; $u_3=8$, $u_4=18$.

Correction de l’exercice 11 – Exponentielle d’une matrice nilpotente

a) $N^2=E_{13}$, $N^3=0$:

$$E(t)=I+tN+\frac{t^2}{2}N^2=\begin{pmatrix}1&t&\frac{t^2}{2}\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}$$

b) $E(s)E(t)=\sum_{j,k}\frac{s^jt^k}{j!k!}N^{j+k}$. En regroupant selon $m=j+k$ (les termes $m\geq p$ sont nuls) :

— $\sum_m\frac{N^m}{m!}\sum_{j+k=m}\binom{m}{j}s^jt^k=\sum_m\frac{(s+t)^m}{m!}N^m=E(s+t)$.

c) $E(t)E(-t)=E(0)=I$: $E(t)$ est inversible, $E(t)^{-1}=E(-t)$.

d) $E(1)^2=\begin{pmatrix}1&1&\frac12\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^2$ a pour première ligne $\left(1,\,1+1,\,\frac12+1+\frac12\right)=(1,2,2)$, et $E(2)$ a pour première ligne $\left(1,2,\frac42\right)=(1,2,2)$ ✓.

Réponse. $E(t)=\begin{pmatrix}1&t&t^2/2\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}$; $E(s)E(t)=E(s+t)$; $E(t)^{-1}=E(-t)$.

Correction de l’exercice 12 – Racines carrées de matrices

a) $(aI+bN)^2=a^2I+2abN$ (car $N^2=0$). On veut $a^2=4$ et $2ab=1$: $a=2$, $b=\frac14$ convient (ou $a=-2$, $b=-\frac14$) :

$$M=\begin{pmatrix}2&\frac14\\0&2\end{pmatrix},\qquad M^2=\begin{pmatrix}4&1\\0&4\end{pmatrix}$$

b) Si $M^2=N$, alors $M^4=N^2=0$: M est nilpotente. En taille 2, on a alors $\det M=0$ (sinon M serait inversible) et $\operatorname{tr}M=0$ (sinon $M^2=(\operatorname{tr}M)M$ donnerait $M^k=(\operatorname{tr}M)^{k-1}M\neq0$). Donc $M^2=0\cdot M-0\cdot I_2=0\neq N$: contradiction.

c) Toute matrice $\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$ avec $a^2+bc=1$ vérifie $M^2=I_2$ (plaquette précédente) ; par exemple $\begin{pmatrix}1&b\\0&-1\end{pmatrix}$ pour tout réel b. Infinité de solutions, contrairement au cas des réels ($x^2=1$ n’en a que deux).

Réponse. $M=\begin{pmatrix}2&1/4\\0&2\end{pmatrix}$; N n’a pas de racine carrée ; I_2 en a une infinité.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – Puissances de aI + bJ

a) aI et bJ commutent, et $J^j = n^{j-1}J$ pour $j \geq 1$:

$$M^k = a^k I + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} b^j n^{j-1} J = a^k I + \frac{1}{n}\left((a+nb)^k - a^k\right)J$$

b) $M = I_3 + J$ ($a = b = 1$, $n = 3$) : $M^k = I_3 + \frac{4^k - 1}{3} J$.

— $k = 2$: $I_3 + 5J$, de diagonale 6 et de coefficients hors diagonale 5. Directement, $(M^2)_{11} = 4 + 1 + 1 = 6$ et $(M^2)_{12} = 2 + 2 + 1 = 5$ ✓.

c) $M^k \to 0$ si et seulement si $a^k \to 0$ et $(a+nb)^k - a^k \to 0$, c'est-à-dire $|a| < 1$ et $|a + nb| < 1$.

Réponse. $M^k = a^k I + \frac{(a+nb)^k - a^k}{n} J$; $M^k = I_3 + \frac{4^k - 1}{3} J$; $M^k \to 0 \Leftrightarrow |a| < 1$ et $|a + nb| < 1$.

Correction de l'exercice 14 – Puissances par factorisation A = PDP⁻¹

a) $P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$, donc $P^{-1} = \frac{1}{2}P$.

b) $PD = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $A = \frac{1}{2}PDP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Dans le produit $(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots$, les facteurs $P^{-1}P$ intérieurs se simplifient :

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$$

d) $n = 2$: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, et $A^2 = \begin{pmatrix} 4+1 & 2+2 \\ 2+2 & 1+4 \end{pmatrix}$ ✓.

Réponse. $P^{-1} = \frac{1}{2}P$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : promenades sur un triangle

a) $A = J - I_3$ (deux sommets distincts sont reliés) ; avec $J^2 = 3J$:

$$A^2 = J^2 - 2J + I_3 = J + I_3 = A + 2I_3$$

b) $X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1)$; le reste $aX + b$ vérifie $2a + b = 2^k$ et $-a + b = (-1)^k$:

— $3a = 2^k - (-1)^k$, $b = (-1)^k + a = \frac{2^k + 2(-1)^k}{3}$; on remplace X par A.

c) La diagonale de A est nulle et ses autres coefficients valent 1 :

— promenades fermées : $(A^k)_{11} = \frac{2^k + 2(-1)^k}{3}$; de 1 à 2 : $(A^k)_{12} = \frac{2^k - (-1)^k}{3}$ (idem de 1 à 3).

— Total : $\frac{2^k + 2(-1)^k + 2 \cdot 2^k - 2(-1)^k}{3} = 2^k$ ✓ (deux choix à chaque pas).

d) $k = 3$: $\frac{8-2}{3} = 2$ promenades fermées, $1 \to 2 \to 3 \to 1$ et $1 \to 3 \to 2 \to 1$ ✓. e) Toutes les promenades de k pas sont équiprobables ($\frac{1}{2^k}$ chacune), donc la probabilité d'être en 1 vaut $\frac{(A^k)_{11}}{2^k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \to \frac{1}{3}$: à long terme, les trois sommets sont équiprobables.

Réponse. $A^k = \frac{2^k - (-1)^k}{3} A + \frac{2^k + 2(-1)^k}{3} I_3$; probabilité $\to \frac{1}{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).