Plaquette 5 – Rang, opérations élémentaires et systèmes linéaires

Matrices — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Rang et opérations élémentaires.

— Opérations sur les lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ($\lambda \neq 0$), $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($i \neq j$). Chacune revient à multiplier **à gauche** par une matrice inversible ; sur les colonnes, **à droite**.

— **Transvection** : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ correspond à $I + \lambda E_{ij}$, d'inverse $I - \lambda E_{ij}$.

— $\mathrm{rg} A$ = nombre de pivots d'une forme échelonnée = nombre maximal de colonnes (ou de lignes) linéairement indépendantes ; $\mathrm{rg} A^{\mathsf{T}} = \mathrm{rg} A$.

— $\mathrm{rg}(AB) \leq \min(\mathrm{rg} A, \mathrm{rg} B)$; multiplier par une matrice inversible ne change pas le rang.

— $\mathrm{rg} A = 1 \Leftrightarrow A = XY^{\mathsf{T}}$ avec X, Y colonnes non nulles.

Systèmes $AX = B$ ($A \in M_{n,p}$) :

$$\{X,\ AX = B\} = \varnothing \quad \text{ou} \quad X_0 + \{X,\ AX = 0\}$$

— la seconde situation comporte $p - \mathrm{rg} A$ inconnues libres ; si A est carrée inversible, la solution est unique : $X = A^{-1}B$.

Correction de l'exercice 1 – Rang d'une matrice rectangulaire

a) $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: $(0,0,1,1)$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$: $(0,0,1,1)$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$: ligne nulle.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{rg} A = 2$$

b) Lignes : $L_3 - L_1 = L_2 - 2L_1$, soit $L_3 = L_2 - L_1$ (vérification : $(2,4,3,1) - (1,2,1,0) = (1,2,2,1)$ ✓). Colonnes : $C_2 = 2C_1$, et $C_4 = C_3 - C_1$ ($(1,3,2) - (1,2,1) = (0,1,1)$ ✓).

c) $4 - 2 = 2$ inconnues libres (x_2 et x_4). Le système échelonné donne $x_3 = -x_4$ et $x_1 = -2x_2 - x_3 = -2x_2 + x_4$:

— $X = x_2(-2,1,0,0)^{\mathsf{T}} + x_4(1,0,-1,1)^{\mathsf{T}}$, $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$.

Réponse. $\mathrm{rg} A = 2$; $L_3 = L_2 - L_1$, $C_2 = 2C_1$, $C_4 = C_3 - C_1$; solutions $x_2(-2,1,0,0) + x_4(1,0,-1,1)$.

Correction de l'exercice 2 – Opérations élémentaires et produits matriciels

a) La ligne i de XM est $L_i(X)M$:

— TM : la ligne 2 devient $L_2 + \lambda L_1$ (car $L_2(T) = (\lambda, 1, 0)$), les autres sont inchangées ;

— DM : la ligne 2 est multipliée par μ ;

— PM : les lignes 1 et 3 sont échangées.

b) La colonne j de MT est $M\,C_j(T)$: $C_1(T) = (1, \lambda, 0)^{\mathsf{T}}$, donc la colonne 1 devient $C_1 + \lambda C_2$; les autres sont inchangées.

c) On annule chaque opération par l'opération inverse :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$T^{-1} = I_3 - \lambda E_{21}, \qquad D^{-1} = \operatorname{diag}(1, \mu^{-1}, 1), \qquad P^{-1} = P$$

— (par exemple $(I + \lambda E_{21})(I - \lambda E_{21}) = I - \lambda^2 E_{21}^2 = I$ car $E_{21}^2 = 0$).

d) Échelonner, c'est effectuer une suite d'opérations $O_1, \dots, O_k$: la matrice obtenue est $G_k \cdots G_1 A$, avec $G = G_k \cdots G_1$ produit d'inversibles, donc inversible.

Réponse. $TM : L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1$; $DM : L_2 \leftarrow \mu L_2$; $PM : L_1 \leftrightarrow L_3$; $MT : C_1 \leftarrow C_1 + \lambda C_2$; inverses $I - \lambda E_{21}$, $\operatorname{diag}(1, \frac{1}{\mu}, 1)$, P.

Correction de l'exercice 3 – Rang d'un produit

a) La colonne j de AB vaut $A\,C_j(B) = \sum_k b_{kj} C_k(A)$: c'est une combinaison des colonnes de A. L'espace engendré par les colonnes de AB est inclus dans celui de A, d'où l'inégalité.

b) Avec $\operatorname{rg} M^{\mathsf{T}} = \operatorname{rg} M$ et a) :

$$\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg}(B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}) \leq \operatorname{rg} B^{\mathsf{T}} = \operatorname{rg} B$$

c) $A = E_{11}$, $B = E_{21}$: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 1$ mais $AB = E_{11}E_{21} = 0$, de rang 0.

d) $\operatorname{rg}(PA) \leq \operatorname{rg} A$ par b), et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(P^{-1}(PA)) \leq \operatorname{rg}(PA)$: égalité. C'est pourquoi l'échelonnement, qui multiplie à gauche par des inversibles, conserve le rang.

Réponse. $\operatorname{rg}(AB) \leq \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$; $E_{11}E_{21} = 0$; $\operatorname{rg}(PA) = \operatorname{rg} A$ si P inversible.

Correction de l'exercice 4 – Rang de $A^{\mathsf{S}}A$

a) Si $AX = 0$, alors $A^{\mathsf{T}}AX = 0$. Réciproquement, si $A^{\mathsf{T}}AX = 0$:

$$0 = X^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} A X = (AX)^{\mathsf{T}}(AX) = \sum_i y_i^2 \qquad (Y = AX)$$

— une somme de carrés réels nulle impose $Y = 0$.

b) Même noyau ; comme A et $A^{\mathsf{T}}A$ ont le même nombre p de colonnes, le théorème du rang donne $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A^{\mathsf{T}}A)$.

c) $A^{\mathsf{T}}A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$, de « $ad - bc$ » égal à $42 - 36 = 6 \neq 0$: inversible, cohérent avec $\operatorname{rg} A = 2$. (C'est la matrice des **moindres carrés** pour ajuster une droite aux points d'abscisses $1, 2, 3$.)

d) Non : $A^{\mathsf{T}}A = 1 + \mathrm{i}^2 = 0$ alors que $\operatorname{rg} A = 1$. L'argument utilisait $\sum y_i^2 = 0 \Rightarrow Y = 0$, faux dans $\mathbb{C}$.

Réponse. Même noyau donc même rang ; $A^{\mathsf{T}}A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$ inversible ; faux sur $\mathbb{C}$ ($1 + \mathrm{i}^2 = 0$).

Correction de l'exercice 5 – Matrices de rang 1

a) La colonne j de XY^{T} est $y_j X$: toutes les colonnes sont proportionnelles à X, et l'une au moins est non nulle ($y_j \neq 0$). Le rang vaut 1.

b) Si $\operatorname{rg} A = 1$, l'espace des colonnes est une droite, engendrée par une colonne $X \neq 0$: $C_j(A) = y_j X$ pour des scalaires y_j. Alors

$$A = \begin{pmatrix} y_1 X & \cdots & y_p X \end{pmatrix} = X Y^{\mathsf{T}}$$

c) Les colonnes sont multiples de $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, avec les coefficients $2, -1, 3$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$A = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}(2 \;\; -1 \;\; 3)$.

d) $A^2 = X(Y^{\mathsf T}X)Y^{\mathsf T} = (Y^{\mathsf T}X)A$ et $Y^{\mathsf T}X = \sum_i x_i y_i = \operatorname{tr}(XY^{\mathsf T})$. Pour $\begin{pmatrix}2 & -1\\-4 & 2\end{pmatrix}$ (trace 4) : son carré vaut $\begin{pmatrix}8 & -4\\-16 & 8\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}2 & -1\\-4 & 2\end{pmatrix}$ ✓.

Réponse. $\operatorname{rg} A = 1 \Leftrightarrow A = XY^{\mathsf T}$; $A = (1,-2)^{\mathsf T}(2,-1,3)$; $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$.

Correction de l’exercice 6 – Rang d’une matrice de Vandermonde

a) $L_2 - L_1 = (0,\, b-a,\, b^2-a^2) = (b-a)(0,1,b+a)$ et $L_3 - L_1 = (c-a)(0,1,c+a)$.

b) Discussion.

— a, b, c distincts : on divise L_2 et L_3 par $b-a$ et $c-a$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donne $(0,0,c-b) \neq 0$: trois pivots, $\operatorname{rg} V = 3$.

— Exactement deux valeurs distinctes : deux lignes de V sont égales, les deux autres sont distinctes et non proportionnelles (premier coefficient 1) : $\operatorname{rg} V = 2$.

— $a = b = c$: trois lignes égales, $\operatorname{rg} V = 1$.

$$\operatorname{rg} V = \operatorname{card}\{a, b, c\}$$

c) $V\begin{pmatrix}c_0\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$ est la colonne des valeurs de $c_0 + c_1X + c_2X^2$ en a, b, c. Pour a, b, c distincts, V est inversible : il existe un unique polynôme de degré ≤ 2 prenant des valeurs données en ces trois points (interpolation de Lagrange).

Réponse. $\operatorname{rg} V$ = nombre de valeurs distinctes parmi a, b, c ; V inversible $\Leftrightarrow a, b, c$ distincts.

Correction de l’exercice 7 – Résoudre un système par le pivot de Gauss

a) Matrice augmentée $(A \mid B)$ et échelonnement :

— $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: $(0,1,1 \mid 1)$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$: $(0,1,2 \mid 3)$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$: $(0,0,1 \mid 2)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 4\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right) \qquad \text{(dernière colonne : second membre)}$$

— Remontée : $z = 2$, $y = 1 - z = -1$, $x = 4 - 2y - z = 4 + 2 - 2 = 4$.

b) $A^{-1}B = (24 - 27 + 7,\, -12 + 18 - 7,\, 4 - 9 + 7) = (4, -1, 2)$ ✓.

— Vérification dans le système : $4 - 2 + 2 = 4$, $8 - 5 + 6 = 9$, $4 - 3 + 6 = 7$ ✓.

Réponse. $(x, y, z) = (4, -1, 2)$.

Correction de l’exercice 8 – Système à paramètre

On retranche la première équation aux deux autres :

$$(a-1)y = a - 1, \qquad (a-1)z = a^2 - 1$$

— **Cas** $a \neq 1$: on divise par $a-1$: $y = 1$, $z = a + 1$, puis $x = 1 - y - z = -a - 1$. Rang 3, solution unique $(-a-1, 1, a+1)$.

— Vérification : deuxième équation, $-a - 1 + a + a + 1 = a$ ✓ ; troisième, $-a - 1 + 1 + a(a+1) = a^2$ ✓.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Cas** $a = 1$: les trois équations sont identiques, $x + y + z = 1$. Rang 1, deux paramètres libres :

$$(x, y, z) = (1 - s - t,\ s,\ t), \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

— géométriquement, un plan de l'espace.

Réponse. $a \neq 1$: $(-a - 1, 1, a + 1)$, rang 3 ; $a = 1$: plan $x + y + z = 1$, rang 1.

Correction de l'exercice 9 – Structure de l'ensemble des solutions

a) $1 + 1 + 1 = 3$ et $1 - 1 = 0$ ✓.

b) $x + y + z = 0$, $x = y$: $z = -2x$. Solutions $t(1, 1, -2)$, $t \in \mathbb{R}$: une droite vectorielle (rang 2, trois inconnues, un paramètre).

c) Par d), les solutions sont

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 1, -2), \qquad t \in \mathbb{R}$$

— c'est une **droite affine** : l'intersection des deux plans $x + y + z = 3$ et $x = y$.

d) Par linéarité, $A(X - X_0) = AX - AX_0 = AX - B$: $AX = B \Leftrightarrow A(X - X_0) = 0$.

Réponse. $(1, 1, 1) + t(1, 1, -2)$, droite affine ; solutions = solution particulière + noyau.

Correction de l'exercice 10 – Rang de J − nI

a) Toutes les colonnes sont égales à $U \neq 0$: $\mathrm{rg} J = 1$.

b) $JU = nU$ (chaque ligne de J somme à n), donc $(J - nI)U = 0$ avec $U \neq 0$: $J - nI_n$ n'est pas inversible, son rang est $\leq n - 1$.

c) $J - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. $L_1 \leftrightarrow L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$: $(0, -3, 3)$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$: $(0, 3, -3)$; $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$: 0.

$$J - 3I_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{rg} = 2$$

d) $JX = \left(\sum x_i\right) U$. Si $\sum x_i = 0$ et $X \neq 0$ (possible pour $n \geq 2$), $JX = 0 = 0 \cdot X$: $\lambda = 0$ convient. Si $\sum x_i \neq 0$, $JX = \lambda X$ impose X proportionnel à U et $\lambda = n$. Donc $J - \lambda I_n$ est non inversible exactement pour $\lambda \in \{0, n\}$.

Réponse. $\mathrm{rg} J = 1$; $(J - nI)U = 0$; $\mathrm{rg}(J - 3I_3) = 2$; $J - \lambda I_n$ non inversible $\Leftrightarrow \lambda \in \{0, n\}$.

Correction de l'exercice 11 – Réduction à la forme J_r

a) $C_2 = 2C_1 \neq 0$: $\mathrm{rg} A = 1$.

b) $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, soit $G_1 A$ avec $G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; puis $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$ donne J_1, soit un produit à droite par $G_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $G_1 A G_2 = J_1$ et

$$A = G_1^{-1} J_1 G_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} J_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, puis $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = A$ ✓.

d) Toute $A \in M_{n,p}$ de rang r s'écrit $A = PJ_rQ$ avec P, Q inversibles, J_r ayant r coefficients 1 en tête de diagonale et des 0 ailleurs : deux matrices de même taille sont **équivalentes** si

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

et seulement si elles ont le même rang.

Réponse. $\operatorname{rg} A = 1$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} J_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A = PJ_rQ$ en général.

Correction de l'exercice 12 – Rangs des puissances d'une matrice nilpotente

a) N a des 1 juste au-dessus de la diagonale. Avec $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$:

$$N^2 = E_{13} + E_{24}, \qquad N^3 = E_{14}, \qquad N^4 = 0$$

b) $\operatorname{rg} N = 3$, $\operatorname{rg} N^2 = 2$, $\operatorname{rg} N^3 = 1$, $\operatorname{rg} N^4 = 0$: le rang diminue d'exactement 1 à chaque puissance (colonnes non nulles distinctes de la base canonique).

c) $M^2 = E_{12}E_{12} + E_{12}E_{34} + E_{34}E_{12} + E_{34}E_{34} = 0$. $\operatorname{rg} M = 2$, $\operatorname{rg} M^2 = 0$.

— N et M sont toutes deux nilpotentes, mais d'indices différents (4 et 2) : la suite des rangs des puissances distingue ces deux types de nilpotence, que le seul rang de la matrice ne voit pas toujours.

Réponse. $N^2 = E_{13} + E_{24}$, $N^3 = E_{14}$, $N^4 = 0$; rangs $3, 2, 1, 0$; $M^2 = 0$, rangs $2, 0$.

Correction de l'exercice 13 – Inversibilité et systèmes

On montre (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i).

— (i) $\Rightarrow$ (ii) : $X = A^{-1}B$ convient, et c'est la seule ($AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$).

— (ii) $\Rightarrow$ (iii) : cas particulier $B = 0$.

— (iii) $\Rightarrow$ (iv) : si $\operatorname{rg} A < n$, le système échelonné $AX = 0$ a une inconnue libre, donc une solution non nulle.

— (iv) $\Rightarrow$ (i) : avec n pivots, Gauss-Jordan transforme $(A \mid I_n)$ en $(I_n \mid A^{-1})$.

Application : $L_2 - L_1 = (3, 3, 3) = L_3 - L_2$, donc $L_1 - 2L_2 + L_3 = 0$. Échelonnée :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— $\operatorname{rg} A = 2 < 3$: A n'est pas inversible, et $X = (1, -2, 1)^{\mathrm{T}}$ vérifie $AX = 0$ ($1 - 4 + 3 = 0$, $4 - 10 + 6 = 0$, $7 - 16 + 9 = 0$ ✓).

Réponse. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) ; la matrice 3×3 des entiers 1 à 9 est de rang 2, $X = (1, -2, 1)$ dans son noyau.

Correction de l'exercice 14 – Équilibrer une réaction chimique

a) Azote : $a = c$; hydrogène : $3a = 2d$; oxygène : $2b = c + d$. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad MX = 0$$

b) $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$: $(0, 0, 3, -2)$; on échange L_2 et L_3 : pivots en colonnes $1, 2, 3$. $\operatorname{rg} M = 3$, et $4 - 3 = 1$ paramètre libre : les solutions forment une droite.

c) En prenant d comme paramètre : $c = \frac{2d}{3}$, $a = c = \frac{2d}{3}$, $b = \frac{c + d}{2} = \frac{5d}{6}$. Le plus petit d rendant tout entier est $d = 6$:

— $a = 4$, $b = 5$, $c = 4$, $d = 6$: $4\,\mathrm{NH_3} + 5\,\mathrm{O_2} \to 4\,\mathrm{NO} + 6\,\mathrm{H_2O}$.

— Contrôle : N : $4 = 4$; H : $12 = 12$; O : $10 = 4 + 6$ ✓.

Réponse. $\operatorname{rg} M = 3$, une droite de solutions ; $4\,\mathrm{NH_3} + 5\,\mathrm{O_2} \to 4\,\mathrm{NO} + 6\,\mathrm{H_2O}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : trafic autour d’un rond-point

a) En A : $500 + x_4 = x_1$. En B : $x_1 = x_2 + 300$. En C : $x_2 + 200 = x_3$. En D : $x_3 = x_4 + 400$. Soit

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 500 \\ x_1 - x_2 = 300 \\ -x_2 + x_3 = 200 \\ x_3 - x_4 = 400 \end{cases}$$

b) Échelonnement : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne $(0, -1, 0, 1 \mid -200)$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donne $(0, 0, 1, -1 \mid 400)$; $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$ donne $(0, 0, 0, 0 \mid 0)$. Rang 3 : la quatrième équation est conséquence des autres, car la somme des quatre bilans exprime que **tout ce qui entre dans le rond-point en ressort** ($500 + 200 = 300 + 400$).

c) Avec $x_4 = t$: $x_3 = t + 400$, $x_2 = x_3 - 200 = t + 200$, $x_1 = t + 500$.

d) Tous les débits sont ≥ 0 dès que $t \geq 0$: le débit minimal sur DA est 0 ; les autres sont alors 500, 200, 400 véhicules par heure.

e) Les entrées (700) ne seraient plus égales aux sorties (750) : la dernière ligne échelonnée deviendrait $0 = 50$, le système serait **incompatible**. Aucun régime permanent n’est possible.

Réponse. Rang 3 (une équation redondante) ; $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (t + 500, t + 200, t + 400, t)$, $t \geq 0$; minimum $x_4 = 0$; incompatible si les sorties dépassent les entrées.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).