Plaquette 1 – Calcul matriciel, inverse, rang et puissances

Matrices — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On maîtrise le produit matriciel et ses pièges, on inverse par **Gauss-Jordan** ou par un **polynôme annulateur**, on calcule un **rang** par échelonnement, et on obtient les puissances par binôme de Newton ou par récurrence.

Exercice 1 – Produit matriciel

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA.

Exercice 2 – Inverse d'une matrice 2x2

Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 – Inversion par Gauss-Jordan

Inverser $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 – Rang d'une matrice

Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 – Puissances par récurrence

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 – Puissances par le binôme

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n.

Exercice 7 – Polynôme annulateur et inverse

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $A^2 = 2A + 3I$.

b) En déduire A^{-1}.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Matrices qui commutent

Déterminer toutes les matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ commutant avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 – Transposée et symétrie

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A + A^{\mathsf{T}}$ est symétrique et $A - A^{\mathsf{T}}$ antisymétrique, puis décomposer $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 – Trace

a) Montrer que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.
b) En déduire qu'il n'existe pas de matrices telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice 11 – Système et matrice inverse

Résoudre le système $\begin{cases} 3x + 5y = 4 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ en utilisant l'inverse calculé plus haut.

Exercice 12 – Inverse de I − N pour N nilpotente

Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer N^2 et N^3.
b) En déduire l'inverse de $I_3 - N$ sans pivot de Gauss.

Exercice 13 – Matrices élémentaires et centre

On note E_{ij} la matrice de $M_n(\mathrm{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i,j), égal à 1.

a) Montrer que $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ (où δ_{jk} vaut 1 si $j = k$ et 0 sinon).
b) Soit M commutant avec toutes les matrices. En écrivant $ME_{ij} = E_{ij}M$, montrer que M est scalaire ($M = \lambda I_n$).

Exercice 14 – Rang selon un paramètre

Déterminer, selon le réel a, le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 15 – Synthèse : suite et matrices

Soient $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$

a) Écrire la relation sous forme matricielle.
b) Calculer $u_n + v_n$ et $u_n - v_n$, puis u_n et v_n.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).