Plaquette 4 – Matrices inversibles et calcul d'inverses

Matrices — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour montrer qu'une matrice carrée A est **inversible**, il suffit de trouver B avec $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$) ; pour montrer qu'elle ne l'est **pas**, on exhibe $X \neq 0$ tel que $AX = 0$. Pour **calculer** l'inverse : la formule en taille 2, la méthode de **Gauss-Jordan** sur $(A \mid I_n)$, un **polynôme annulateur** à terme constant non nul, ou une structure (triangulaire, par blocs, $I + uv^{\mathsf{T}}$). On termine toujours par la vérification $AA^{-1} = I_n$ sur une ou deux lignes.

Exercice 1 – Gauss-Jordan en taille 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Appliquer la méthode de Gauss-Jordan à $(A \mid I_3)$ pour montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

b) Vérifier le résultat sur deux lignes de AA^{-1}.

c) En déduire la solution du système $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 – Inverse avec un paramètre en taille 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A_a = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$.

a) Pour quelles valeurs de a la matrice A_a est-elle inversible ? Donner alors A_a^{-1}.

b) Pour $a = 1$, trouver une colonne $X \neq 0$ telle que $A_1 X = 0$.

c) Résoudre, pour $a = 2$, le système $2x + y = 1$, $x + 2y = 5$.

Exercice 3 – Inverse par un polynôme annulateur

Soit $n \geq 3$ et $A = J - I_n$, où J a tous ses coefficients égaux à 1 ($J^2 = nJ$).

a) Montrer que $A^2 = (n-2)A + (n-1)I_n$.

b) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_n.

c) Écrire A^{-1} pour $n = 3$ et vérifier.

d) Que se passe-t-il pour $n = 1$?

Exercice 4 – Inverse d'une matrice triangulaire

Soient a, b, c réels et $T = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Montrer que T est inversible et calculer T^{-1} en résolvant $TX = Y$ par remontée.
b) Vérifier que T^{-1} est triangulaire supérieure à diagonale de 1.
c) Écrire $T = I + N$ et retrouver $T^{-1} = I - N + N^2$.

Exercice 5 – AB = I suffit pour des matrices carrées

Soient $A, B \in M_n(\mathrm{K})$ telles que $AB = I_n$.

a) Montrer que $BX = 0 \Rightarrow X = 0$. En déduire que B est inversible (on admet qu'une matrice carrée M telle que $MX = 0 \Rightarrow X = 0$ est inversible).
b) En déduire que $A = B^{-1}$, puis que $BA = I_n$.
c) Montrer que le résultat est faux pour des matrices non carrées : $A = (1 \quad 0)$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 – Diagonale strictement dominante

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout i, $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

a) Soit $X \neq 0$ tel que $AX = 0$, et i un indice tel que $|x_i| = \max_j |x_j|$. En écrivant la ligne i de $AX = 0$, aboutir à une contradiction.
b) En déduire que A est inversible.
c) Application : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité sans calcul, puis vérifier que le coefficient $(1,1)$ de A^{-1} vaut $\frac{19}{50}$ sachant que la première colonne de A^{-1} est $\frac{1}{50}\begin{pmatrix} 19 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 – La matrice de Pascal

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dont le coefficient (i,j) est $\binom{j-1}{i-1}$.

a) Montrer que P est la matrice qui envoie les coefficients d'un polynôme $Q(X)$ de degré ≤ 3 (dans la base $1, X, X^2, X^3$) sur ceux de $Q(X+1)$.
b) En déduire, sans calcul, que P^{-1} correspond à $Q(X) \mapsto Q(X-1)$, et écrire P^{-1}.
c) Vérifier en calculant la deuxième ligne de PP^{-1}.

Exercice 8 – Inverse de I + uvᵀ

Soient $u, v \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda = v^{\mathsf{T}}u$ (un réel).

a) Montrer que $(uv^{\mathsf{T}})^2 = \lambda\, uv^{\mathsf{T}}$.
b) On suppose $\lambda \neq -1$. Chercher l'inverse de $I_n + uv^{\mathsf{T}}$ sous la forme $I_n + \alpha\, uv^{\mathsf{T}}$.
c) Application : $n = 3$, $u = v = (1,1,1)^{\mathsf{T}}$. Calculer $(I_3 + J)^{-1}$.
d) Que se passe-t-il si $\lambda = -1$? Donner un exemple.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Le groupe des matrices inversibles

a) Montrer que si $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$, alors $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

b) Montrer que A^{T} est inversible et que $(A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}}$.

c) La somme de deux matrices inversibles est-elle inversible ?

d) Soit A inversible et N nilpotente avec $AN = NA$. Montrer que $A + N$ est inversible (écrire $A + N = A(I + A^{-1}N)$).

Exercice 10 – Inverse d'une matrice triangulaire par blocs

Soient $A \in \mathrm{GL}_p(\mathrm{K})$, $D \in \mathrm{GL}_q(\mathrm{K})$, $B \in M_{p,q}(\mathrm{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

a) Chercher M^{-1} sous la forme $\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$ et montrer que $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$.

b) Application : inverser $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par blocs 2×2.

Exercice 11 – Inversibilité selon un paramètre en taille 3

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Échelonner A_a et déterminer les valeurs de a pour lesquelles A_a est inversible.

b) Pour la valeur interdite, donner une relation de dépendance entre les lignes et une colonne $X \neq 0$ telle que $A_a X = 0$.

c) Calculer A_3^{-1} et le vérifier.

Exercice 12 – Nilpotence et inversibilité

Soit $N \in M_n(\mathrm{K})$ nilpotente, $N^p = 0$ avec $p \geq 1$ minimal.

a) Montrer que N n'est pas inversible.

b) Montrer que $I_n + N$ et $I_n - N$ sont inversibles, et donner leurs inverses.

c) Montrer que $I_n + N + N^2$ est inversible (chercher son inverse comme polynôme en N dans le cas $p = 3$).

d) Application : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; calculer $(I_3 + N + N^2)^{-1}$.

Exercice 13 – Équations AX = B et XA = B

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^{-1}.

b) Résoudre $AX = B$ puis $XA = B$ d'inconnue $X \in M_2(\mathbb{R})$.

c) Les deux solutions sont-elles égales ? Pourquoi ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Résoudre $AXA = I_2$.

Exercice 14 – Matrice de Vandermonde et interpolation

Soit $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (ligne i : $1, x_i, x_i^2$ avec $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$).

a) Montrer que $V\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ est la colonne des valeurs en $0, 1, 2$ du polynôme $c_0 + c_1 X + c_2 X^2$.

b) En déduire que les colonnes de V^{-1} sont les coefficients des polynômes de Lagrange L_0, L_1, L_2 associés à $0, 1, 2$.

c) Écrire V^{-1} et le vérifier.

d) Trouver le polynôme de degré ≤ 2 valant $1, 3, 2$ en $0, 1, 2$ à l'aide de V^{-1}.

Exercice 15 – Synthèse : une corde tendue discrétisée

On discrétise une corde fixée aux deux bouts en trois points intérieurs. Les déplacements x_1, x_2, x_3 sous une charge b vérifient $AX = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Échelonner A et montrer qu'elle est inversible.

b) Vérifier que $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Résoudre $AX = b$ pour une charge uniforme $b = (1, 1, 1)^{\mathsf{T}}$. Où la corde descend-elle le plus ?

d) Montrer que si tous les b_i sont positifs, tous les x_i le sont. Interpréter.

e) On admet que, pour n points, $(A^{-1})_{ij} = \dfrac{\min(i,j)\,(n+1-\max(i,j))}{n+1}$. Vérifier cette formule pour $n = 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).