Plaquette 2 – Produit matriciel, matrices remarquables et trace

Matrices — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Le produit matriciel se lit de plusieurs façons, à choisir selon la question : **coefficient par coefficient** ($\sum_k a_{ik}b_{kj}$), **colonne par colonne** (la colonne j de AB est A fois la colonne j de B), ou **par blocs**. Les matrices remarquables (diagonales, triangulaires, de permutation, de rotation, symétriques) forment des familles **stables** par produit ; on le démontre une fois pour toutes, puis on l'utilise. La **trace**, linéaire et vérifiant $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, fournit des obstructions rapides.

Exercice 1 – Colonne fois ligne, ligne fois colonne

Soient $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $Y^{\mathsf{T}}X$ et $M = XY^{\mathsf{T}}$.

b) Montrer, sans calcul coefficient par coefficient, que $M^2 = (Y^{\mathsf{T}}X)\,M$, puis donner M^n pour $n \geq 1$.

c) Quel est le rang de M ? Et sa trace ?

Exercice 2 – Calcul par blocs

Soit $B \in M_2(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} I_2 & B \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ (écriture par blocs 2×2).

a) Justifier que le produit de deux matrices par blocs se calcule comme un produit de matrices 2×2, **en respectant l'ordre** des blocs.

b) Calculer A^2, puis A^n.

c) En déduire l'inverse de A.

d) Application avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: écrire A^{-1} en entier.

Exercice 3 – Commutant d'une matrice diagonale

Soit $D = \mathrm{diag}(1, 2, 3)$.

a) Pour $M = (m_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$, calculer les coefficients de DM et de MD.

b) En déduire les matrices qui commutent avec D.

c) Même question pour $D' = \mathrm{diag}(1, 1, 3)$. Qu'est-ce qui change ?

Exercice 4 – Matrices triangulaires supérieures

On note T_n l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $M_n(\mathrm{K})$.

a) Montrer que T_n est stable par produit et que $(AB)_{ii} = a_{ii}b_{ii}$.

b) Montrer qu'une matrice **strictement** triangulaire supérieure N vérifie $N^n = 0$ (étudier la position des coefficients non nuls de N^k).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire que $A \in T_n$ à diagonale nulle est nilpotente, et vérifier sur $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 – Matrices de permutation

Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

a) Calculer Ce_1, Ce_2, Ce_3. Interpréter.

b) Calculer C^2 et C^3. En déduire C^{-1} et C^{2026}.

c) Vérifier que $C^{\mathsf{T}}C = I_3$.

d) Pour $M \in M_3(\mathbb{R})$, décrire CM (en termes de lignes de M) et MC (en termes de colonnes).

Exercice 6 – Matrices de rotation

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $R(\theta)R(\varphi) = R(\theta + \varphi)$. En déduire que les $R(\theta)$ commutent entre elles.

b) Calculer $R(\theta)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et $R(\theta)^{-1}$. Comparer avec $R(\theta)^{\mathsf{T}}$.

c) Déterminer le plus petit $n \geq 1$ tel que $R\left(\frac{2\pi}{5}\right)^n = I_2$, puis tel que $R\left(\frac{4\pi}{6}\right)^n = I_2$.

d) Existe-t-il $M \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_2$?

Exercice 7 – Propriétés de la trace

a) Montrer que $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(BCA) = \mathrm{tr}(CAB)$.

b) Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calculer $\mathrm{tr}(ABC)$ et $\mathrm{tr}(ACB)$. Conclure.

c) Montrer que $\mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}}A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2$ pour $A \in M_n(\mathbb{R})$. En déduire que $A^{\mathsf{T}}A = 0 \Rightarrow A = 0$.

d) Montrer que si P est inversible, $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}A$.

Exercice 8 – Matrices symétriques et antisymétriques

On note S_n et A_n les ensembles de matrices symétriques et antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $A^{\mathsf{T}}A$ et AA^{T} sont symétriques pour toute A.

b) Soient $S, S' \in S_n$. Montrer que SS' est symétrique si et seulement si $SS' = S'S$. Donner un contre-exemple à la symétrie de SS' en taille 2.

c) Montrer qu'une matrice antisymétrique a une diagonale nulle et que $x^{\mathsf{T}}Ax = 0$ pour tout $x \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

d) Combien de coefficients faut-il choisir pour définir une matrice de S_n ? de A_n ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Résoudre X² = 0 et X² = I₂

a) Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer que $X^2 = (a+d)X - (ad-bc)I_2$.

b) En déduire les matrices $X \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = 0$.

c) Déterminer les $X \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = I_2$. Donner un exemple autre que $\pm I_2$.

Exercice 10 – La matrice dont tous les coefficients valent 1

Soit $J \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$) dont tous les coefficients valent 1.

a) Montrer que $J^2 = nJ$, puis donner J^k pour $k \geq 1$.

b) Montrer que l'ensemble des matrices $aI_n + bJ$ est stable par produit et que ces matrices commutent entre elles.

c) Calculer $(I_n + J)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$, en utilisant J^k et le binôme.

Exercice 11 – Matrices stochastiques

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite **stochastique** si ses coefficients sont positifs et si la somme de chaque ligne vaut 1. On note U la colonne dont tous les coefficients valent 1.

a) Montrer que la condition sur les lignes équivaut à $AU = U$.

b) En déduire que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique, puis que A^k l'est pour tout k.

c) Un individu est chaque jour de bonne ou de mauvaise humeur ; s'il est de bonne humeur, il le reste le lendemain avec probabilité 0,8 ; s'il est de mauvaise humeur, il le reste avec probabilité 0,6. Écrire la matrice de transition A et calculer A^2. Interpréter le coefficient $(1,1)$ de A^2.

Exercice 12 – Matrices idempotentes

Une matrice P est **idempotente** si $P^2 = P$.

a) Montrer que $I - P$ est alors idempotente, et que $P(I-P) = 0$.

b) Pour quels réels a la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle idempotente ?

c) Montrer qu'une matrice idempotente 2×2 différente de 0 et de I_2 a pour trace 1 (utiliser $P^2 = \operatorname{tr}(P)P - \det(P)I_2$).

d) Montrer qu'une matrice idempotente inversible est égale à I_n.

Exercice 13 – Commutateurs

Pour $A, B \in M_n(\mathrm{K})$, on pose $[A,B] = AB - BA$.

a) Montrer que $\operatorname{tr}[A,B] = 0$ et que $[A,B] = -[B,A]$.

b) Dans $M_2(\mathrm{K})$, calculer $[E_{12}, E_{21}]$, $[E_{11}, E_{12}]$ et $[E_{21}, E_{11}]$.

c) En déduire que toute matrice de trace nulle de $M_2(\mathrm{K})$ est une **somme** de commutateurs.

d) Vérifier l'identité de Jacobi $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$ sur un calcul développé.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Le produit n'est pas commutatif : conséquences

a) Trouver $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$ mais $BA \neq 0$.

b) Trouver $A \neq 0$ telle que $A^2 = 0$. Pourquoi ne peut-on pas « simplifier » $AB = AC$ en $B = C$?

c) Montrer que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow AB = BA$, et que $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2 \Leftrightarrow AB = BA$.

d) Montrer que si $AB = BA$, alors $A^2B^3 = B^3A^2$.

Exercice 15 – Synthèse : les matrices circulantes

Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (exercice sur les permutations : $C^3 = I_3$). Pour a, b, c réels, on pose $M(a,b,c) = aI_3 + bC + cC^2$.

a) Écrire $M(a,b,c)$ en entier.

b) Montrer que le produit de deux matrices de cette forme en est encore une, et que ces matrices commutent entre elles. Relier ce produit à celui des polynômes $a + bX + cX^2$ modulo $X^3 - 1$.

c) Calculer $(I_3 + C)(I_3 - C + C^2)$. En déduire l'inverse de $I_3 + C$.

d) Montrer que $I_3 - C$ n'est pas inversible (calculer $(I_3 - C)(I_3 + C + C^2)$).

e) Calculer $M(1,1,0)^2$ et vérifier le résultat avec b).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).