Plaquette 3 – Puissances de matrices et suites récurrentes

Matrices — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Quatre méthodes pour calculer A^n, à choisir selon la forme de A : **conjecturer puis démontrer** par récurrence (matrices triangulaires, blocs) ; le **binôme** lorsque $A = \lambda I + N$ avec N nilpotente ; un **polynôme annulateur** $P(A) = 0$ et le reste de la division de X^n par P ; une **factorisation** $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale, qui donne $A^n = PD^nP^{-1}$. Réciproquement, toute suite récurrente linéaire s'écrit $X_{n+1} = AX_n$, donc $X_n = A^nX_0$.

Exercice 1 – Binôme avec une partie nilpotente

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Écrire $A = 3I_3 + N$ et calculer N^2, N^3.

b) Justifier l'emploi du binôme et calculer A^n pour $n \geq 2$.

c) Vérifier pour $n = 2$.

Exercice 2 – Puissances par un polynôme annulateur

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $A^2 = 5A - 6I_2$.

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 5X + 6$.

c) En déduire A^n en fonction de A et I_2, puis les coefficients de A^n.

d) Contrôler pour $n = 3$ par un calcul direct.

Exercice 3 – La matrice de Fibonacci

Soit $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et (F_n) la suite de Fibonacci ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$).

a) Montrer par récurrence que $F^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ pour $n \geq 1$.

b) En utilisant $F^{m+n} = F^mF^n$, montrer que $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$. En déduire $F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$.

c) En admettant que $\det(AB) = \det A \det B$, démontrer l'identité de Cassini $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

d) Vérifier b) et c) pour $n = 5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

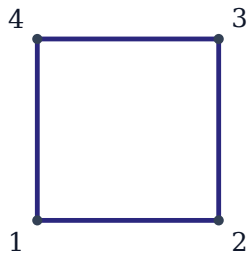
Exercice 4 – Chemins sur un carré

On considère le graphe dont les sommets $1, 2, 3, 4$ sont ceux d'un carré, reliés par ses quatre côtés (figure). Sa **matrice d'adjacence** A a pour coefficient (i,j) le nombre d'arêtes entre i et j.

a) Écrire A et calculer A^2. Interpréter ses coefficients.

b) Montrer que $A^3 = 4A$. En déduire A^{2k} et A^{2k+1} pour $k \geq 1$.

c) Combien y a-t-il de chemins de longueur 6 partant du sommet 1 et y revenant ? De longueur 5 allant de 1 à 2 ?



Le graphe du carré : chaque sommet est relié à ses deux voisins.

Exercice 5 – Chaîne de Markov à deux états

On reprend la matrice de transition $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ (humeur bonne / mauvaise d'un jour au suivant).

a) Vérifier que $A^2 = 1{,}4A - 0{,}4I_2$.

b) En déduire $A^n = a_n A + b_n I_2$ avec $a_n = \dfrac{1 - 0{,}4^n}{0{,}6}$ et $b_n = 1 - a_n$.

c) Déterminer la limite de A^n quand $n \to +\infty$ et l'interpréter.

d) Vérifier que la ligne $\pi = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ vérifie $\pi A = \pi$.

Exercice 6 – Une similitude matricielle

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $A = \sqrt{2}\, R\left(\frac{\pi}{4}\right)$, où $R(\theta)$ est la matrice de rotation d'angle θ.

b) En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$, puis A^4 et A^8.

c) Retrouver A^2 par un calcul direct et vérifier que $A^2 = 2A - 2I_2$.

d) Interpréter géométriquement l'action de A sur les vecteurs du plan.

Exercice 7 – Puissances d'une matrice par blocs

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Écrire A par blocs $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et justifier que $A^n = \begin{pmatrix} B^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

b) Calculer B^n par le binôme.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire A^n, puis $\lim_{n\to\infty} \frac{A^n}{3^n}$.

Exercice 8 – Suite arithmético-géométrique et matrice

Soient $a \neq 1$, b réels et $u_{n+1} = au_n + b$.

a) Montrer que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Montrer par récurrence que $M^n = \begin{pmatrix} a^n & b\frac{a^n-1}{a-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) En déduire u_n en fonction de u_0, et retrouver le point fixe $\ell = \frac{b}{1-a}$.

d) Application : $u_0 = 10$, $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 3$. Calculer u_n et sa limite.

Exercice 9 – Puissances d'une matrice de rang 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Écrire $A = XY^{\mathsf{T}}$ avec X, Y colonnes, et en déduire $A^2 = (\mathrm{tr}A)A$.

b) Calculer A^n pour $n \geq 1$.

c) Calculer $(I_2 + A)^n$ par le binôme.

d) Contrôler c) pour $n = 2$.

Exercice 10 – Suite récurrente d'ordre 3

On considère $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$, avec $u_0 = 3$, $u_1 = 2$, $u_2 = 6$.

a) Écrire la relation sous la forme $X_{n+1} = CX_n$ avec $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

b) Factoriser $P = X^3 - 2X^2 - X + 2$. On admet que $P(C) = 0$ et que u_n s'écrit $\alpha + \beta(-1)^n + \gamma 2^n$; déterminer α, β, γ.

c) Calculer u_3 et u_4 par la récurrence et par la formule.

Exercice 11 – Exponentielle d'une matrice nilpotente

Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente, $N^p = 0$. Pour t réel, on pose $E(t) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N^k$.

a) Calculer $E(t)$ pour $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que $E(s)E(t) = E(s+t)$ (développer le produit et utiliser le binôme de Newton sur les coefficients).

c) En déduire que $E(t)$ est inversible et donner son inverse.

d) Vérifier b) sur l'exemple de a) avec $s = t = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Racines carrées de matrices

Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Trouver une matrice M de la forme $aI_2 + bN$ telle que $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Montrer qu'il n'existe aucune matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = N$ (considérer M^4 et utiliser $M^2 = \operatorname{tr}(M)M - \det(M)I_2$).

c) Montrer que I_2 a une infinité de racines carrées dans $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 13 – Puissances de aI + bJ

Soit $J \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 (donc $J^2 = nJ$), et $M = aI_n + bJ$.

a) Montrer que $M^k = a^k I_n + \dfrac{(a+nb)^k - a^k}{n} J$ pour $k \geq 0$.

b) Application : $n = 3$, $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer M^k et vérifier pour $k = 2$.

c) Pour quelles valeurs de (a, b) la suite (M^k) tend-elle vers la matrice nulle ?

Exercice 14 – Puissances par factorisation A = PDP⁻¹

Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \operatorname{diag}(3, 1)$.

a) Calculer P^2 et en déduire P^{-1}.

b) Calculer $A = PDP^{-1}$.

c) Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ et en déduire les coefficients de A^n.

d) Vérifier sur $n = 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : promenades sur un triangle

Un pion se déplace sur les sommets $1, 2, 3$ d'un triangle (figure) : à chaque pas, il va sur l'un des deux autres sommets. On note A la matrice d'adjacence du triangle.

a) Montrer que $A = J - I_3$, où J a tous ses coefficients égaux à 1, puis que $A^2 = A + 2I_3$.

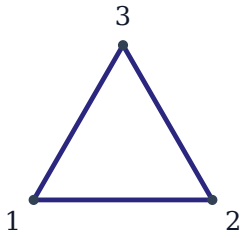
b) Déterminer le reste de la division de X^k par $X^2 - X - 2$, et en déduire

$$A^k = \frac{2^k - (-1)^k}{3} A + \frac{2^k + 2(-1)^k}{3} I_3$$

c) Combien y a-t-il de promenades de k pas partant de 1 et y revenant ? Allant de 1 à 2 ? Vérifier que le total vaut 2^k.

d) Vérifier pour $k = 3$ en énumérant les promenades fermées.

e) Si le pion choisit à chaque pas l'un des deux sommets au hasard, quelle est la limite de la probabilité d'être en 1 après k pas ?



Le graphe du triangle : chaque sommet est relié aux deux autres.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).