Plaquette 5 – Rang, opérations élémentaires et systèmes linéaires

Matrices — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Le **rang** d'une matrice se calcule en l'**échelonnant** : les opérations élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) ne le changent pas, et il vaut le nombre de pivots. Il gouverne les **systèmes linéaires** $AX = B$: l'ensemble des solutions est vide ou de la forme « une solution particulière plus les solutions de $AX = 0$ », avec $p - \mathrm{rg}A$ paramètres libres (p inconnues). Les opérations élémentaires sont elles-mêmes des **produits** par des matrices inversibles simples, ce qui permet de raisonner sur les matrices plutôt que sur les équations.

Exercice 1 – Rang d'une matrice rectangulaire

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Échelonner A et en déduire son rang.

b) Donner une relation de dépendance entre les lignes, puis entre les colonnes.

c) Combien de paramètres libres le système $AX = 0$ comporte-t-il ? En donner les solutions.

Exercice 2 – Opérations élémentaires et produits matriciels

On travaille dans $M_3(\mathbb{R})$, avec $T = I_3 + \lambda E_{21}$, $D = \mathrm{diag}(1, \mu, 1)$ ($\mu \neq 0$) et P la matrice obtenue en échangeant les lignes 1 et 3 de I_3.

a) Pour $M \in M_3(\mathbb{R})$, décrire TM, DM et PM en termes d'opérations sur les lignes de M.

b) Décrire MT en termes d'opérations sur les colonnes.

c) Montrer que T, D, P sont inversibles et donner leurs inverses.

d) En déduire que l'échelonnement d'une matrice A fournit G inversible avec GA échelonnée.

Exercice 3 – Rang d'un produit

a) Montrer que $\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}A$ (les colonnes de AB sont des combinaisons des colonnes de A).

b) En utilisant la transposée, montrer que $\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}B$.

c) Donner un exemple en taille 2 où $\mathrm{rg}(AB) < \min(\mathrm{rg}A, \mathrm{rg}B)$.

d) Montrer que si P est inversible, $\mathrm{rg}(PA) = \mathrm{rg}A$.

Exercice 4 – Rang de A^TA

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $AX = 0 \Leftrightarrow A^TAX = 0$ (pour le sens réciproque, calculer X^TA^TAX).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire que A et $A^{\mathsf{T}}A$ ont le même noyau, puis (théorème du rang, admis) le même rang.

c) Application : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $A^{\mathsf{T}}A$ et vérifier qu'elle est inversible.

d) Le résultat reste-t-il vrai sur $\mathbb{C}$ avec la transposée ? Tester $A = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Exercice 5 – Matrices de rang 1

a) Soient $X \in M_{n,1}$ et $Y \in M_{p,1}$ non nuls. Montrer que XY^{T} est de rang 1.

b) Réciproquement, soit A de rang 1. Montrer que toutes ses colonnes sont proportionnelles à une colonne $X \neq 0$, et en déduire $A = XY^{\mathsf{T}}$.

c) Écrire $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ sous la forme XY^{T}.

d) Pour A carrée de rang 1, montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$. Vérifier avec $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 – Rang d'une matrice de Vandermonde

Soient a, b, c réels et $V = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$.

a) Effectuer $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, puis factoriser.

b) Montrer que $\mathrm{rg}V$ est égal au nombre de valeurs distinctes parmi a, b, c.

c) Interpréter en termes de polynômes de degré ≤ 2 passant par des points imposés.

Exercice 7 – Résoudre un système par le pivot de Gauss

Résoudre le système

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x + 5y + 3z = 9 \\ x + 3y + 3z = 7 \end{cases}$$

a) par le pivot de Gauss, en écrivant la matrice augmentée ;

b) en vérifiant avec $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (plaquette précédente).

Exercice 8 – Système à paramètre

Résoudre, selon le réel a, le système

— $x + y + z = 1$,
— $x + ay + z = a$,
— $x + y + az = a^2$.

Préciser le rang de la matrice du système dans chaque cas.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Structure de l'ensemble des solutions

Soit le système $x + y + z = 3$, $x - y = 0$, d'inconnues réelles.

a) Vérifier que $X_0 = (1, 1, 1)$ est solution.

b) Résoudre le système homogène associé.

c) En déduire toutes les solutions et interpréter géométriquement.

d) Montrer en général que si X_0 est solution de $AX = B$, alors X est solution si et seulement si $X - X_0$ est solution de $AX = 0$.

Exercice 10 – Rang de J − nI

Soit $n \geq 2$ et $J \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. On note U la colonne de 1.

a) Quel est le rang de J ?

b) Montrer que $(J - nI_n)U = 0$. Que peut-on en déduire sur le rang de $J - nI_n$?

c) Échelonner $J - 3I_3$ et donner son rang.

d) Pour quels réels λ la matrice $J - \lambda I_n$ n'est-elle pas inversible ? (Chercher $X \neq 0$ avec $JX = \lambda X$.)

Exercice 11 – Réduction à la forme J_r

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Quel est le rang de A ?

b) Trouver une opération sur les lignes et une opération sur les colonnes qui transforment A en J_1. En déduire P, Q inversibles avec $A = PJ_1Q$.

c) Vérifier le produit.

d) Énoncer le résultat général pour une matrice de rang r.

Exercice 12 – Rangs des puissances d'une matrice nilpotente

Soit $N = E_{12} + E_{23} + E_{34} \in M_4(\mathbb{R})$.

a) Écrire N et calculer N^2, N^3, N^4.

b) Donner le rang de chaque puissance.

c) Soit $M = E_{12} + E_{34}$. Calculer M^2 et les rangs de M et M^2. Comparer N et M.

Exercice 13 – Inversibilité et systèmes

Soit $A \in M_n(\mathrm{K})$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes (on admet que le rang est le nombre de pivots) :

— (i) A est inversible ;

— (ii) pour tout B, le système $AX = B$ a une unique solution ;

— (iii) le système $AX = 0$ n'a que la solution nulle ;

— (iv) $\mathrm{rg} A = n$.

Puis appliquer à $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Équilibrer une réaction chimique

On veut équilibrer la combustion de l'ammoniac : $a\,\mathrm{NH_3} + b\,\mathrm{O_2} \to c\,\mathrm{NO} + d\,\mathrm{H_2O}$.

a) Écrire la conservation des atomes d'azote, d'hydrogène et d'oxygène sous la forme d'un système homogène $MX = 0$, $X = (a, b, c, d)^{\mathsf{T}}$.

b) Déterminer le rang de M et le nombre de paramètres libres.

c) Donner la solution en entiers naturels les plus petits possible.

Exercice 15 – Synthèse : trafic autour d'un rond-point

Un rond-point à sens unique relie quatre carrefours $A \to B \to C \to D \to A$; on note x_1, x_2, x_3, x_4 les débits (véhicules par heure) sur les tronçons AB, BC, CD, DA (figure). Il entre 500 véhicules par heure en A et 200 en C ; il en sort 300 en B et 400 en D. En chaque carrefour, ce qui entre est égal à ce qui sort.

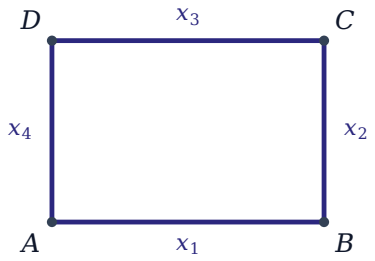
a) Écrire le système des quatre équations de conservation.

b) Montrer que la matrice du système est de rang 3 ; quelle équation est redondante, et pourquoi ?

c) Résoudre le système en prenant $x_4 = t$ comme paramètre.

d) Les débits devant être positifs, quel est le débit minimal sur le tronçon DA ? Donner alors les autres débits.

e) Que se passerait-il si l'on sortait 450 véhicules par heure en D au lieu de 400 ?



Le rond-point parcouru dans le sens $A \to B \to C \to D \to A$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).