Plaquette 3 – Équations algébriques et racines n-ièmes

Nombres complexes — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Racines n-ièmes de l'unité : ω^k, $k = 0, \dots, n-1$, avec $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$:

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \omega^k\right), \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \begin{cases} n & \text{si } n \mid p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **Racines n-ièmes de** $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$: $r^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/n}\,\omega^k$.
- **Second degré** $az^2 + bz + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{C})$: $z = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$ avec $\delta^2 = b^2 - 4ac$.
- **Relations coefficients-racines** : $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$, $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.
- $|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 2\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$.

Correction de l'exercice 1 – Racines sixièmes de l'unité

a) $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/3}$, $k = 0, \dots, 5$: 1, $\dfrac{1}{2} \pm \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $-\dfrac{1}{2} \pm \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, -1.

b) $(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) = X^2 - 2\cos\theta\, X + 1$. Avec $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$:

$$X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$$

c) $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$ et $X^3 + 1 = (X+1)(X^2 - X + 1)$ ✓. Les deux trinômes ont un discriminant $-3 < 0$: irréductibles sur $\mathbb{R}$.

Réponse. $X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$.

Correction de l'exercice 2 – Racines cubiques d'un imaginaire pur

On écrit le second membre sous forme exponentielle : $8\mathrm{i} = 8\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$. Les solutions sont

$$z_k = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k = 0, 1, 2$$

- $z_0 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} = \sqrt{3} + \mathrm{i}$; $z_1 = 2\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/6} = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$; $z_2 = 2\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/2} = -2\mathrm{i}$.
- **Contrôle** : $(-2\mathrm{i})^3 = -8\mathrm{i}^3 = 8\mathrm{i}$ ✓. Les trois points forment un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon 2, et leur somme est nulle.

Réponse. $\sqrt{3} + \mathrm{i}$, $-\sqrt{3} + \mathrm{i}$, $-2\mathrm{i}$.

Correction de l'exercice 3 – Sommes de puissances des racines de l'unité

a) Si $n \mid p$, $\omega^p = 1$ et la somme vaut n. Sinon $\omega^p \neq 1$ et, par la somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k = \frac{1 - \omega^{pn}}{1 - \omega^p} = 0$$

b) $\prod \omega^k = \omega^{0+1+\dots+(n-1)} = \omega^{n(n-1)/2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}$.

c) $\sum_{m=0}^{2}(1 + j^m)^n = \sum_k \binom{n}{k} \sum_{m=0}^{2} j^{mk} = 3\sum_{3 \mid k}\binom{n}{k}$ par a). Or $1 + j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ et $1 + j^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$, d'où $2^n + 2\cos\dfrac{n\pi}{3}$. Pour $n = 6$: $\binom{6}{0} + \binom{6}{3} + \binom{6}{6} = 22 = \dfrac{64+2}{3}$ ✓.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) n ou 0 · b) $(-1)^{n-1}$ · c) $\dfrac{2^n + 2\cos(n\pi/3)}{3}$.

Correction de l'exercice 4 – L'équation $(z+1)^n = (z-1)^n$

a) En $z = 1$: $2^n \neq 0$. Pour $z \neq 1$, on divise par $(z-1)^n$.

b) $\dfrac{z+1}{z-1} = \omega^k$ avec $k \in \{1, \dots, n-1\}$ ($k = 0$ donnerait $z+1 = z-1$, impossible). On isole z puis on factorise par l'angle moitié :

$$z = \frac{\omega^k + 1}{\omega^k - 1} = \frac{2\cos\frac{k\pi}{n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/n}}{2\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/n}} = -\mathrm{i}\cot\frac{k\pi}{n}$$

c) $n = 5$: $\cot 36° \approx 1{,}376$ et $\cot 72° \approx 0{,}325$, d'où $\pm 1{,}376\,\mathrm{i}$ et $\pm 0{,}325\,\mathrm{i}$. Géométriquement, $|z+1| = |z-1|$: z est équidistant de -1 et 1, donc sur la **médiatrice**, l'axe imaginaire. (L'équation est de degré $n-1$: il y a bien $n-1$ solutions.)

Réponse. $z_k = -\mathrm{i}\cot\frac{k\pi}{n}$, $k = 1, \dots, n-1$.

Correction de l'exercice 5 – Le cosinus de 2π/5

a) $\omega^4 = \overline{\omega}$, donc $u = \omega + \overline{\omega} = 2\,\mathrm{Re}\,\omega = 2\cos\frac{2\pi}{5}$; de même v.

b) $u + v = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = -1$. $uv = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 = \omega^3 + \omega^4 + \omega + \omega^2 = -1$. Donc u et v sont racines de

$$X^2 + X - 1 = 0$$

c) $u > 0$ (cosinus d'un angle aigu) : $u = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, d'où $\cos\frac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0{,}309$. Côté : $|1-\omega| = 2\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}} = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}} \approx 1{,}176$.

Réponse. $\cos\frac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$; côté $\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}} \approx 1{,}176$.

Correction de l'exercice 6 – Un produit de sinus

a) $X^n - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X - \omega^k)$ et aussi $X^n - 1 = (X-1)(1 + X + \dots + X^{n-1})$; on simplifie par $X - 1$ (intégrité de $\mathbb{C}[X]$).

b) En $X = 1$: $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \omega^k) = n$, puis on prend le module.

c) $|1 - \omega^k| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$ (angle moitié, avec $\frac{k\pi}{n} \in]0, \pi[$), donc

$$2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = n$$

— $n = 3$: $\sin 60°\sin 120° = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ ✓. $n = 4$: $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ ✓.

Réponse. $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

Correction de l'exercice 7 – Second degré à coefficients complexes

a) $\Delta = (3+2\mathrm{i})^2 - 4(5+5\mathrm{i}) = 5 + 12\mathrm{i} - 20 - 20\mathrm{i} = -15 - 8\mathrm{i}$. On cherche $\delta = x + \mathrm{i}y$:

$$x^2 - y^2 = -15, \qquad 2xy = -8, \qquad x^2 + y^2 = |\Delta| = 17$$

— $x^2 = 1$, $y^2 = 16$, $xy < 0$: $\delta = 1 - 4\mathrm{i}$ (ou son opposé). Contrôle : $(1-4\mathrm{i})^2 = 1 - 8\mathrm{i} - 16 = -15 - 8\mathrm{i}$ ✓.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $z = \dfrac{3+2\mathrm{i} \pm (1-4\mathrm{i})}{2}$: $z_1 = 2-\mathrm{i}$ et $z_2 = 1+3\mathrm{i}$. Somme $3+2\mathrm{i}$ ✓ ; produit $(2-\mathrm{i})(1+3\mathrm{i}) = 2+6\mathrm{i}-\mathrm{i}+3 = 5+5\mathrm{i}$ ✓.

Réponse. $z \in \{2-\mathrm{i},\ 1+3\mathrm{i}\}$.

Correction de l'exercice 8 – Identité de Sophie Germain

a) $-4 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$: $z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4 + k\pi/2)}$, soit $\pm 1 \pm \mathrm{i}$.

b) $(X-(1+\mathrm{i}))(X-(1-\mathrm{i})) = X^2 - 2X + 2$ et de même avec $-1 \pm \mathrm{i}$: $X^2 + 2X + 2$.

c) Différence de deux carrés :

$$X^4 + 4 = (X^2+2)^2 - (2X)^2 = (X^2 + 2 - 2X)(X^2 + 2 + 2X)$$

— Pour $n \geq 2$: $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 \geq 2$ et $n^2 + 2n + 2 \geq 10$: produit de deux facteurs > 1, donc composé. Pour $n = 1$: 5, premier.

Réponse. $z = \pm 1 \pm \mathrm{i}$; $X^4 + 4 = (X^2 + 2X + 2)(X^2 - 2X + 2)$.

Correction de l'exercice 9 – Puissance égale au conjugué

a) Modules : $|z|^n = |z|$, donc $|z|(|z|^{n-1} - 1) = 0$. Si $n = 1$, l'équation $z = \overline{z}$ décrit les réels (cas à part) ; pour $n \geq 2$, $z \neq 0$ impose $|z| = 1$.

b) Si $|z| = 1$, $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ et l'équation devient

$$z^{n+1} = 1$$

— Réciproquement, une racine $(n+1)$-ième de l'unité est de module 1 et vérifie $z^n = z^{-1} = \overline{z}$ ✓.

c) Pour $n \geq 2$: $n+2$ solutions (0 et les $n+1$ racines). Pour $n = 4$: 0 et les sommets du pentagone régulier.

Réponse. Pour $n \geq 2$: 0 et les racines $(n+1)$-ièmes de l'unité ($n+2$ solutions).

Correction de l'exercice 10 – Équation bicarrée complexe

a) $Z^2 - (1+\mathrm{i})Z + \mathrm{i} = 0$: $Z = 1$ convient ($1 - 1 - \mathrm{i} + \mathrm{i} = 0$), et le produit des racines vaut i, donc l'autre est $Z = \mathrm{i}$:

$$Z^2 - (1+\mathrm{i})Z + \mathrm{i} = (Z-1)(Z-\mathrm{i})$$

b) $z^2 = 1$ donne $z = \pm 1$; $z^2 = \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$ donne $z = \pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$. Quatre solutions de module 1.

Réponse. $z \in \left\{1, -1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}, -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\right\}$.

Correction de l'exercice 11 – Racines cubiques de 1 + i

a) $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, donc les racines cubiques sont

$$z_k = 2^{1/6}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k = 0, 1, 2$$

— soit des arguments $\dfrac{\pi}{12}$, $\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{17\pi}{12}$.

b) $2^{1/6} \approx 1{,}1225$.

c) $z_k = z_0\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/3} = z_0 j^k$: multiplier par $j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$ est la rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. Les trois points forment un triangle équilatéral centré en O.

Réponse. $z_k = 2^{1/6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/12 + 2k\pi/3)}$, module $\approx 1{,}1225$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Factorisation réelle de $X^5 - 1$

a) $X^5 - 1 = \prod_{k=0}^{4} (X - \omega^k)$, $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/5}$.

b) $\omega^4 = \overline{\omega}$ et $\omega^3 = \overline{\omega^2}$:

$$X^5 - 1 = (X-1)\left(X^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5}X + 1\right)$$

c) $X^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}X + 1$ et $X^2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}X + 1$. Produit : coefficient de X^3 : $\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{2} = 1$; de X^2 : $2 - \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{4} = 2 - 1 = 1$; de X : 1 ; d'où $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ ✓, et $(X-1)(X^4 + \ldots + 1) = X^5 - 1$.

Réponse. $X^5 - 1 = (X-1)\left(X^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}X + 1\right)\left(X^2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}X + 1\right)$.

Correction de l'exercice 13 – Polygones inscrits et nombre π

a) Chaque côté mesure $|\omega^{k+1} - \omega^k| = |\omega - 1| = 2\sin\frac{\pi}{n}$, et il y a n côtés.

b) $p_6 = 12\sin\frac{\pi}{6} = 6$; $p_{12} \approx 6{,}2117$; $p_{100} \approx 6{,}2822$. Comme $\sin u \sim u$ en 0 :

$$p_n = 2n\sin\frac{\pi}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\pi \approx 6{,}2832$$

c) Le polygone se découpe en n triangles isocèles de sommet O, de côtés 1 et d'angle $\frac{2\pi}{n}$, d'aire $\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$ chacun : $a_n \to \pi$. Archimède encadrait π par des polygones inscrits et circonscrits à 96 côtés.

Réponse. $p_n = 2n\sin\frac{\pi}{n} \to 2\pi$; $a_n = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} \to \pi$.

Correction de l'exercice 14 – Somme des racines d'un polynôme

a) Relations coefficients-racines pour $X^3 + aX^2 + bX + c$:

$$\sigma_1 = -a = 2, \qquad \sigma_2 = b = 3, \qquad \sigma_3 = -c = 4$$

b) $\sum z_i^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 4 - 6 = -2$.

c) $P' = 3X^2 - 4X + 3$ a un discriminant $16 - 36 < 0$: P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc s'annule une seule fois (TVI : $P(1) = -2$, $P(2) = 2$). Les deux autres racines ne sont pas réelles ; les coefficients étant réels, elles sont conjuguées. (Cohérent avec b) : une somme de carrés de réels ne peut pas être négative.)

Réponse. $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 4$; $\sum z_i^2 = -2$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : produits et sommes sur les racines de l'unité

a) $Q(2) = 1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. Pour $n = 4$: $(2 - \mathrm{i})(2+1)(2+\mathrm{i}) = 3 \times 5 = 15 = 2^4 - 1$ ✓.

b) $\prod(1 + \omega^k) = (-1)^{n-1}\prod(-1 - \omega^k) = (-1)^{n-1}Q(-1)$, et $Q(-1) = \frac{1 - (-1)^n}{2}$: le produit vaut 1 si n est impair, 0 si n est pair (-1 est alors racine n-ième de l'unité).

c) Dérivée logarithmique d'un produit, évaluée en $X = 1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-\omega^k} = \frac{Q'(1)}{Q(1)} = \frac{1 + 2 + \ldots + (n-1)}{n} = \frac{n-1}{2}$$

— $n = 4$: $\frac{1}{1-\mathrm{i}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1-\mathrm{i}}{2} = \frac{3}{2}$ ✓.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) $2^n - 1$ · b) 1 (n impair), 0 (n pair) · c) $\frac{n-1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).