Plaquette 5 – Exponentielle complexe et applications

Nombres complexes — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Exponentielle complexe : pour $z = x + \mathrm{i}y$,

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}, \qquad |\mathrm{e}^{z}| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}, \qquad \mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^{z}\mathrm{e}^{w}, \qquad \mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{w} \Leftrightarrow z - w \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$$

— $\mathrm{e}^{z} = a$ $(a \neq 0) \Leftrightarrow z \in \ln|a| + \mathrm{i}\arg a + 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$.

— **Signal** $A\cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}\left(\underline{A}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right)$ avec $\underline{A} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

— **Impédances** : $Z_R = R$, $Z_L = \mathrm{i}L\omega$, $Z_C = \dfrac{1}{\mathrm{i}C\omega}$; en série, elles s'ajoutent.

— **Somme géométrique** : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kb} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nb/2}\,\frac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}$ $(b \notin 2\pi\mathbb{Z})$.

— **Orthogonalité** : $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)x}\,\mathrm{d}x = 1$ si $n = m$, 0 sinon.

Correction de l'exercice 1 – Résoudre exp(z) = 1 + i

a) $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$. Avec $z = x + \mathrm{i}y$, l'équation $\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ équivaut à égalité des modules et des arguments :

$$\mathrm{e}^{x} = \sqrt{2}, \qquad y \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

— $z_k = \ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \frac{\ln 2}{2} + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Toutes sur la droite verticale $x = \frac{\ln 2}{2} \approx 0{,}347$, espacées de 2π : l'exponentielle est $2\mathrm{i}\pi$-périodique.

c) $-2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$: $z = \ln 2 + \mathrm{i}(\pi + 2k\pi)$. $\mathrm{e}^{z} = 0$ n'a **aucune** solution ($|\mathrm{e}^{z}| = \mathrm{e}^{x} > 0$).

Réponse. $z = \frac{\ln 2}{2} + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$; $\mathrm{e}^{z} = 0$ impossible.

Correction de l'exercice 2 – Images de droites par l'exponentielle

a) $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$: quand x décrit $\mathbb{R}$, le module e^{x} décrit $]0, +\infty[$ et l'argument reste b : **demi-droite ouverte** issue de O, d'angle polaire b.

b) $\mathrm{e}^{a+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$: **cercle** de centre O et de rayon e^{a} (parcouru une infinité de fois).

c) Rectangle : module entre $\mathrm{e}^{0} = 1$ et $\mathrm{e}^{\ln 2} = 2$, argument entre 0 et $\frac{\pi}{2}$:

$$\left\{w : 1 \leq |w| \leq 2,\ 0 \leq \arg w \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

— un quart de couronne. Bande : tous les modules > 0 et arguments dans $]0, \pi[$: le **demi-plan supérieur** $\operatorname{Im} w > 0$.

Réponse. Horizontales → demi-droites ; verticales → cercles ; bande → demi-plan supérieur.

Correction de l'exercice 3 – Une équation en exp(z)

a) $w^2 + w + 1 = 0$: ce sont les racines cubiques de l'unité autres que 1 (car $w^3 - 1 = (w-1)(w^2 + w + 1)$) :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$w = j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} \quad \text{ou} \quad w = j^2 = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3}$$

b) $\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} \Leftrightarrow z \in \frac{2\mathrm{i}\pi}{3} + 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$; de même pour j^2. Les solutions sont les $z = \mathrm{i}\left(\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$: toutes imaginaires pures (car $|w| = 1$ impose $\operatorname{Re} z = 0$).

Réponse. $z = \mathrm{i}\left(\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Correction de l’exercice 4 – Cosinus d’un nombre complexe

a) $\cos(\mathrm{i}y) = \frac{\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{y}}{2} = \operatorname{ch} y \to +\infty$: le cosinus complexe n’est **pas** borné.

b) $u + \frac{1}{u} = 4 \Leftrightarrow u^2 - 4u + 1 = 0 \Leftrightarrow u = 2 \pm \sqrt{3}$ (réels positifs). Puis $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = 2 \pm \sqrt{3}$:

$$\mathrm{i}z \in \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z = 2k\pi \mp \mathrm{i}\ln(2 + \sqrt{3})$$

— car $\ln(2 - \sqrt{3}) = -\ln(2 + \sqrt{3})$ (produit $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$).

c) $\ln(2 + \sqrt{3}) \approx 1{,}3170$ et $\operatorname{ch}(1{,}3170) \approx 2{,}000$ ✓ (avec $z = -\mathrm{i}\ln(2 + \sqrt{3})$, $\cos z = \operatorname{ch}(\ln(2 + \sqrt{3})) = \frac{(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})}{2} = 2$).

Réponse. $\cos z = 2 \Leftrightarrow z = 2k\pi \pm \mathrm{i}\ln(2 + \sqrt{3})$.

Correction de l’exercice 5 – Somme de deux signaux

a) $3\cos\omega t = \operatorname{Re}(3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$; $4\sin\omega t = \operatorname{Re}(-4\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$ (car $-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ a pour partie réelle $\sin\omega t$).

b) Amplitude complexe totale :

$$\underline{A} = 3 - 4\mathrm{i} = 5\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arctan(4/3)}$$

— $s_1 + s_2 = 5\cos(\omega t - 0{,}927)$ ($\varphi = -\arctan\frac{4}{3} \approx -0{,}927$ rad $\approx -53{,}1°$).

c) Les vecteurs 3 et $-4\mathrm{i}$ s’ajoutent comme des vecteurs du plan (triangle 3-4-5).

Réponse. $3\cos\omega t + 4\sin\omega t = 5\cos\left(\omega t - \arctan\frac{4}{3}\right)$.

Correction de l’exercice 6 – Impédance d’un circuit RLC

a) Les impédances en série s’additionnent :

$$Z = R + \mathrm{i}L\omega + \frac{1}{\mathrm{i}C\omega} = R + \mathrm{i}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

b) $L\omega = 50$, $\frac{1}{C\omega} = \frac{1}{10^{-5} \times 500} = 200$: $Z = 10 - 150\mathrm{i}$, $|Z| = \sqrt{100 + 22\,500} \approx 150{,}3\ \Omega$.

c) Z réel $\Leftrightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega} \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-6}}} = 1000$ rad/s. Alors $|Z| = R = 10\ \Omega$, minimum : l’intensité est **maximale**, c’est la résonance.

Réponse. $Z = 10 - 150\mathrm{i}$ à 500 rad/s ; résonance à $\omega_0 = 1000$ rad/s, $|Z| = 10\ \Omega$.

Correction de l’exercice 7 – Somme de cosinus en progression arithmétique

a) $C = \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}\right)^k\right)$, avec $\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} \neq 1$.

b) Somme géométrique puis angle moitié au numérateur et au dénominateur :

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kb} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)b} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)b/2} \cdot 2\mathrm{i}\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}b/2} \cdot 2\mathrm{i}\sin\frac{b}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nb/2}\frac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}$$

— On multiplie par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$ et on prend la partie réelle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\dfrac{\sin 2{,}1}{\sin 0{,}35}\cos(0{,}3+1{,}75) \approx \dfrac{0{,}8632}{0{,}3429}\times(-0{,}4611) \approx -1{,}1607$ ✓, comme la somme directe.

Réponse. $C = \dfrac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\cos\left(a+\dfrac{nb}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 8 – Interférences de n ondes

a) Somme géométrique et angle moitié (exercice précédent avec $n-1$ au lieu de n) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\varphi/2}\frac{\sin(n\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$$

— d'où le module. Si $\varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$, tous les termes valent 1 : $A = n$.

b) $\dfrac{\sin\varphi}{\sin(\varphi/2)} = 2\cos\dfrac{\varphi}{2}$. Annulation si $\varphi \equiv \pi\ [2\pi]$: ondes en **opposition de phase**.

c) $\varphi = 0$: $A^2 = 100$. $\varphi = \frac{\pi}{10}$: $A = \dfrac{\sin(\pi/2)}{\sin(\pi/20)} \approx 6{,}39$, $A^2 \approx 40{,}9$. L'intensité chute d'environ 59 % pour un petit déphasage : plus il y a de fentes, plus les pics de lumière sont **fins**.

Réponse. $A = \left|\dfrac{\sin(n\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}\right|$; $n=2$: $2\left|\cos\dfrac{\varphi}{2}\right|$.

Correction de l'exercice 9 – Spirale logarithmique

a) $|z(t)| = \mathrm{e}^{-0,1t}$, $\arg z(t) = t$: le point tourne à vitesse angulaire constante en se rapprochant de O : **spirale** qui s'enroule vers l'origine.

b) Dérivée de l'exponentielle complexe :

$$z'(t) = (-0{,}1+\mathrm{i})\,z(t), \qquad \arg\frac{z'(t)}{z(t)} = \arg(-0{,}1+\mathrm{i}) \approx 95{,}7°$$

— constant : la spirale coupe tous ses rayons sous le même angle (propriété qui la caractérise, observée sur les coquilles de nautile).

c) $\mathrm{e}^{-0,1t} = 0{,}1 \Leftrightarrow t = 10\ln 10 \approx 23{,}0$, soit $\dfrac{23{,}0}{2\pi} \approx 3{,}7$ tours.

Réponse. $|z| = \mathrm{e}^{-0,1t}$, angle constant $\approx 95{,}7°$; module ÷10 après 3,7 tours.

Correction de l'exercice 10 – Produit de trois cosinus

a) $\cos a\cos b = \dfrac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b})}{4}$, et en regroupant les termes conjugués :

$$\cos a\cos b = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$$

b) $\cos x\cos 2x = \dfrac{\cos 3x+\cos x}{2}$, puis

$\cos x\cos 2x\cos 3x = \dfrac{\cos^2 3x+\cos x\cos 3x}{2} = \dfrac{1}{4}+\dfrac{\cos 6x}{4}+\dfrac{\cos 4x+\cos 2x}{4}$.

c) Les cosinus $\cos kx$ ($k \geq 1$) sont d'intégrale nulle sur une période : il reste $\frac{1}{4}\times 2\pi = \frac{\pi}{2}$ (contrôle numérique : 1,5708 ✓).

Réponse. $\cos x\cos 2x\cos 3x = \frac{1}{4}(1+\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x)$; intégrale $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 11 – Coefficients d'un polynôme trigonométrique

a) Pour $k \neq 0$, une primitive est $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\mathrm{i}k}$, de même valeur en 0 et 2π :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx}\,dx = \left[\frac{e^{ikx}}{ik}\right]_0^{2\pi} = 0$$

— Pour $k = 0$, l'intégrale vaut 2π.

b) $f(x)e^{-imx} = \sum c_k e^{i(k-m)x}$; par linéarité et a), seul le terme $k = m$ survit.

c) $\cos^3 x = \frac{(e^{ix}+e^{-ix})^3}{8} = \frac{1}{8}e^{3ix} + \frac{3}{8}e^{ix} + \frac{3}{8}e^{-ix} + \frac{1}{8}e^{-3ix}$. Et $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^3 x\, e^{-ix}\,dx = \frac{3}{8}$ par b) ✓ (c'est le principe des **séries de Fourier**).

Réponse. $c_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f e^{-imx}$; $\cos^3 x$: $c_{\pm 1} = \frac{3}{8}$, $c_{\pm 3} = \frac{1}{8}$.

Correction de l'exercice 12 – Oscillations amorties

a) $e^{(-\alpha+i\omega)(t+T)} = e^{(-\alpha+i\omega)t}e^{-\alpha T}e^{i\omega T}$ et $e^{i\omega T} = e^{2i\pi} = 1$; on prend la partie réelle ($e^{-\alpha T}$ est réel).

b) Les maximums sont séparés de T (la dérivée x' vérifie la même relation) :

$$\delta = \ln\frac{x(t)}{x(t+T)} = \alpha T = \frac{2\pi\alpha}{\omega}$$

c) $T = 1$ s, $\delta = 0{,}5$: rapport $e^{-0,5} \approx 0{,}607$ par période. $e^{-0,5n} = 0{,}01 \Leftrightarrow n = 2\ln 100 \approx 9{,}2$: environ 9 à 10 pseudo-périodes.

Réponse. $\delta = \frac{2\pi\alpha}{\omega}$; ici $\delta = 0{,}5$, amplitude $\div 100$ en $\approx 9{,}2$ périodes.

Correction de l'exercice 13 – Une équation trigonométrique par sommation

a) Avec $a = x$, $b = x$ et 3 termes ($n = 2$) :

$$\sum_{k=1}^{3} \cos kx = \frac{\sin\frac{3x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos(x+x)$$

b) Pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ la somme vaut $3 \neq 0$. Sinon, il faut $\cos 2x = 0$, soit $x \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, ou $\sin\frac{3x}{2} = 0$, soit $x \in \frac{2\pi}{3}\mathbb{Z}$, en excluant $2\pi\mathbb{Z}$: $x \equiv \pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

c) $x = \frac{2\pi}{3}$: $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0$ ✓. $x = \frac{\pi}{4}$: $\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ ✓.

Réponse. $x \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ ou $x \equiv \pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

Correction de l'exercice 14 – Formules d'addition retrouvées

a) $(\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$: on identifie parties réelle et imaginaire,

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b, \qquad \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

b) On divise par $\cos a\cos b$: $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$.

c) Avec $\tan a = \frac{1}{2}$, $\tan b = \frac{1}{3}$: $\tan(a+b) = \frac{5/6}{1-1/6} = 1$, et $a+b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $a+b = \frac{\pi}{4}$. En complexes : $(2+i)(3+i) = 5+5i$, d'argument $\frac{\pi}{4}$ ✓.

Réponse. $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : le réseau électrique triphasé

a) $\underline{V_k} = V\sqrt{2}\,e^{-2ik\pi/3} = V\sqrt{2}\,\bar{j}^k$; la somme vaut $V\sqrt{2}(1+\bar{j}+\bar{j}^2) = 0$. Donc $v_0 + v_1 + v_2 = 0$ à chaque instant : le fil **neutre** ne transporte aucun courant pour une charge équilibrée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Angle moitié :

$$|\underline{V_0} - \underline{V_1}| = V\sqrt{2}\left|1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi/3}\right| = V\sqrt{2}\cdot 2\sin\frac{\pi}{3} = V\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$$

— Tension efficace entre phases : $\sqrt{3}\times 230 \approx 398$ V, les « 400 V » du triphasé.

c) $1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi/3} = \frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$: u est en **avance** de $\frac{\pi}{6} = 30°$ sur v_0.

d) Les trois vecteurs forment une étoile à 120° ; $\underline{V_0} - \underline{V_1}$ est la diagonale du losange construit sur $\underline{V_0}$ et $-\underline{V_1}$.

Réponse. $\sum \underline{V_k} = 0$; tension composée $\sqrt{3}V \approx 398$ V, en avance de 30°.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).