# Plaquette 2 – Formes trigonométriques, Moivre et Euler

## Nombres complexes — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

**Boîte à outils**

**Angle moitié** : pour $a, b$ réels,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = 2\cos\frac{a-b}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a+b}{2}}, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = 2\mathrm{i}\sin\frac{a-b}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a+b}{2}}$$

— **Euler** : $\cos x = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$, $\sin x = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$.

— **Moivre** : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$.

— $|zw| = |z||w|$, $\arg(zw) \equiv \arg z + \arg w\ [2\pi]$, $\arg\frac{z}{w} \equiv \arg z - \arg w\ [2\pi]$.

— $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$ ; $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$ ; $|z| = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$.

— Un polynôme à coefficients **réels** qui s'annule en $z$ s'annule en $\overline{z}$.

## Correction de l'exercice 1 – Somme de deux exponentielles

**a)** On met en facteur l'angle moitié :

$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$$

— Pour $\theta \in\ ]-\pi, \pi[$, $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ : module $2\cos\frac{\theta}{2}$, argument $\frac{\theta}{2}$.

**b)** $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\right) = -2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$, de module $2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$ : c'est la longueur de la corde.

**c)** $\theta = \frac{2\pi}{3}$ : $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\cos\frac{\pi}{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$. Le parallélogramme construit sur 1 et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est un **losange** : sa diagonale porte la bissectrice, d'où l'argument $\frac{\theta}{2}$.

**Réponse.** $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$ ; corde $2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$.

## Correction de l'exercice 2 – Factoriser une somme de cosinus

**a)** Factorisation par l'angle moitié $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)/2}$ : il reste $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a-b)/2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a-b)/2} = 2\cos\frac{a-b}{2}$.

**b)** Parties réelle et imaginaire :

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}, \qquad \sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

**c)** $\cos x + \cos 3x = 2\cos 2x\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$ ou $\cos x = 0$ : $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

**Réponse.** $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ ; c) $x \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ ou $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

## Correction de l'exercice 3 – Module et argument d'un quotient

**a)** $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ et $\sqrt{3} - \mathrm{i} = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$.

**b)** Modules et arguments se composent :

$$|z| = \frac{(\sqrt{2})^5}{2^3} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \arg z \equiv \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{6} = \frac{7\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $z = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}$ (contrôle numérique ✓).

**c)** $\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}} = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/12}$ ; puissance 12 : $2^6\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi} = -64$.

**Réponse.** $z = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}$ ; c) $-64$.

## Correction de l’exercice 4 – Linéariser une puissance de sinus

**a)** Avec $\sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$ et le binôme :

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^5 = (\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}) - 5(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}) + 10(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$$

— et $(2\mathrm{i})^5 = 32\mathrm{i}$ : $\sin^5 x = \frac{2\mathrm{i}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)}{32\mathrm{i}} = \frac{10\sin x - 5\sin 3x + \sin 5x}{16}$.

**b)** $\int_0^{\pi} \sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{k}$ pour $k$ impair : $\frac{1}{16}\left(20 - \frac{10}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{16}\cdot\frac{256}{15} = \frac{16}{15}$.

**c)** $\sin^5 x = (1-\cos^2 x)^2 \sin x$ et $u = \cos x$ : $\int_{-1}^{1}(1-u^2)^2\,\mathrm{d}u = 2\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{16}{15}$ ✓.

**Réponse.** $\sin^5 x = \frac{10\sin x - 5\sin 3x + \sin 5x}{16}$ ; intégrale $\frac{16}{15}$.

## Correction de l’exercice 5 – Tangente de l’angle triple

**a)** $\cos x + \mathrm{i}\sin x = \cos x(1+\mathrm{i}t)$, donc par Moivre $\cos 3x + \mathrm{i}\sin 3x = \cos^3 x\,(1+\mathrm{i}t)^3$, avec

$$(1+\mathrm{i}t)^3 = (1-3t^2) + \mathrm{i}(3t - t^3)$$

— Le quotient partie imaginaire / partie réelle donne $\tan 3x$.

**b)** Pour ces trois valeurs, $3x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right\}$, donc $\tan 3x = \sqrt{3}$ : $3t - t^3 = \sqrt{3}(1-3t^2)$, soit $t^3 - 3\sqrt{3}\,t^2 - 3t + \sqrt{3} = 0$. Les trois tangentes sont distinctes : ce sont **les** trois racines.

**c)** $\tan 0{,}9 \approx 1{,}260158$ et $\frac{3t - t^3}{1-3t^2}$ avec $t = \tan 0{,}3$ donne la même valeur ✓.

**Réponse.** $\tan 3x = \frac{3t - t^3}{1-3t^2}$.

## Correction de l’exercice 6 – Parallélogramme et identité

**a)** On développe avec $|u|^2 = u\overline{u}$ :

$$|z \pm w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})$$

— et l’on additionne : les termes croisés s’éliminent.

**b)** La somme des carrés des **diagonales** d’un parallélogramme égale la somme des carrés des **quatre côtés**.

**c)** $4^2 + d^2 = 2(3^2 + 5^2) = 68$, d’où $d^2 = 52$ et $d = 2\sqrt{13} \approx 7{,}21$.

**Réponse.** $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ ; c) $2\sqrt{13}$.

## Correction de l’exercice 7 – Cosinus de π/12

**a)** $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$.

**b)** On développe le produit :

$$\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}9659$ et $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}2588$.

**c)** $\frac{(8+2\sqrt{12})+(8-2\sqrt{12})}{16}=1$ ✓. $\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4}=2-\sqrt{3}$.

**Réponse.** $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.

## Correction de l’exercice 8 – Équation trigonométrique par les complexes

**a)** $(1-\mathrm{i}\sqrt{3})(\cos x+\mathrm{i}\sin x)$ a pour partie réelle $\cos x+\sqrt{3}\sin x$. Et $1-\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$, donc

$$\mathrm{Re}\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\pi/3)}\right)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

**b)** $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ : $x\equiv 0$ ou $x\equiv\frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$. Contrôle : $1+0=1$ ✓ et $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$ ✓.

**c)** $a-\mathrm{i}b=R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$ avec $R=\sqrt{a^2+b^2}$ : $a\cos x+b\sin x=R\cos(x-\varphi)$, de maximum $\sqrt{a^2+b^2}$.

**Réponse.** $\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ ; $x\equiv 0$ ou $\frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$.

## Correction de l’exercice 9 – Nombres égaux au carré de leur conjugué

**a)** En prenant les modules : $|z|=|z|^2$, donc $|z|(|z|-1)=0$.

**b)** Si $|z|=1$, alors $\overline{z}=\frac{1}{z}$ ; l’équation devient $\frac{1}{z}=z^2$, c’est-à-dire

$$z^3=1$$

**c)** Réciproquement, 0 convient, et si $z^3=1$, $|z|=1$ donc $\overline{z}=\frac{1}{z}=z^2$ ✓. Solutions : $0$, $1$, $j=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$, $j^2=\overline{j}$.

**Réponse.** $z\in\{0,1,j,j^2\}$.

## Correction de l’exercice 10 – Somme de carrés de cosinus

**a)** $\cos^2 u=\frac{1+\cos 2u}{2}$, donc $S_n=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}$.

**b)** Avec $\omega=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}\neq 1$ ($n\geq 2$) :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k=\frac{1-\omega^n}{1-\omega}=0$$

— La partie réelle est nulle : $\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}=0$.

**c)** $S_n=\frac{n}{2}$. $n=2$ : $\cos^2 0+\cos^2\frac{\pi}{2}=1$ ✓. $n=5$ : calcul numérique 2,5 ✓.

**Réponse.** $S_n=\frac{n}{2}$.

## Correction de l’exercice 11 – Racines conjuguées d’un polynôme réel

**a)** $(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$ et $(1+\mathrm{i})^3=2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})=-2+2\mathrm{i}$. Donc $P(1+\mathrm{i})=-2+2\mathrm{i}-2\mathrm{i}+2=0$ ✓.

**b)** Les coefficients sont réels : $P(\overline{z})=\overline{P(z)}=\overline{0}=0$.

**c)** $(X-1-\mathrm{i})(X-1+\mathrm{i})=(X-1)^2+1=X^2-2X+2$, et la division donne

$$X^3-X^2+2=(X^2-2X+2)(X+1)$$

— Troisième racine : $-1$ (contrôle : $-1-1+2=0$ ✓). Sur $\mathbb{R}$, le facteur $X^2-2X+2$ ($\Delta<0$) est irréductible.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Réponse.** $P = (X+1)(X^2 - 2X + 2)$ ; racines $-1$, $1 \pm \mathrm{i}$.

## Correction de l'exercice 12 – Nombres de module 1

**a)** $z\overline{z} = |z|^2$, donc $|z| = 1 \Leftrightarrow z\overline{z} = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$.

**b)** On calcule le conjugué avec $\overline{z} = \frac{1}{z}$, $\overline{w} = \frac{1}{w}$ :

$$\overline{\left(\frac{z+w}{1+zw}\right)} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{w}}{1 + \frac{1}{zw}} = \frac{w+z}{zw+1}$$

— Le nombre est égal à son conjugué : il est réel.

**c)** $\overline{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} = \frac{1+1/z}{1-1/z} = \frac{z+1}{z-1} = -\frac{1+z}{1-z}$ : imaginaire pur. Avec l'angle moitié : $\frac{2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}}{-2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}} = \mathrm{i}\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \mathrm{i}\cot\frac{\theta}{2}$.

**Réponse.** b) réel ; c) $\frac{1+z}{1-z} = \mathrm{i}\cot\frac{\theta}{2}$.

## Correction de l'exercice 13 – Parcourir le cercle unité

**a)** $f'(t) = -\sin t + \mathrm{i}\cos t = \mathrm{i}(\cos t + \mathrm{i}\sin t) = \mathrm{i}f(t)$.

**b)** Multiplier par i, c'est tourner de $\frac{\pi}{2}$ sans changer le module : $f'(t)$ est orthogonal à $f(t)$ (le rayon) et $|f'(t)| = |f(t)| = 1$. Le point parcourt le cercle à vitesse constante, et la vitesse est **tangente**.

**c)** $g' = \mathrm{i}\omega g$ et

$$g'' = (\mathrm{i}\omega)^2 g = -\omega^2 g$$

— L'accélération pointe vers le centre ($-g$), de norme $R\omega^2$ : c'est l'accélération **centripète**.

**Réponse.** $f' = \mathrm{i}f$ ; vitesse tangente de norme 1 ; $g'' = -\omega^2 g$.

## Correction de l'exercice 14 – Produit de nombres de module 1 et rotation

**a)** Si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, alors $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\alpha)}$ : même module, argument augmenté de $\alpha$.

**b)** On multiplie par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ :

$$a' = (2+\mathrm{i})\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)$$

**c)** $OA = OA'$ ($|a| = |a'| = \sqrt{5}$) et l'angle $A\hat{O}A' = \frac{\pi}{3}$ : un triangle isocèle d'angle au sommet $\frac{\pi}{3}$ est équilatéral. (Contrôle : $|a' - a| = |a||\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} - 1| = \sqrt{5}\cdot 2\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{5}$ ✓.)

**Réponse.** $a' = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)$ ; $OAA'$ équilatéral de côté $\sqrt{5}$.

## Correction de l'exercice 15 – Synthèse : une somme binomiale trigonométrique

**a)** Linéarité de la partie réelle et formule du binôme :

$$C_n + \mathrm{i}S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^k 1^{n-k} = (1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n$$

**b)** $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 2\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2}$, donc $(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n = 2^n\cos^n\frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx/2}$. Parties réelle et imaginaire :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$C_n = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2}$ et $S_n = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2}$.

**c)** $2^6 \cos^6(0{,}35) \cos(2{,}1) \approx 64 \times 0{,}6871 \times (-0{,}5048) \approx -22{,}20$ ✓ (identique au calcul direct de la somme).

**d)** $x = \frac{\pi}{2}$ : $2^n \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cos \frac{n\pi}{4} = 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}$. Pour $n = 4$ : $4 \cos \pi = -4$ ; directement, $1 + 0 - 6 + 0 + 1 = -4$ ✓.

**Réponse.** $C_n = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2}$, $S_n = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2}$ ; d) $2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).