Plaquette 4 – Géométrie et transformations du plan complexe

Nombres complexes — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Angle et rapport entre deux vecteurs d'origine A :

$$\frac{AC}{AB} = \left|\frac{c-a}{b-a}\right|, \qquad (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \arg\frac{c-a}{b-a}\ [2\pi]$$

- **Similitude directe** $z' = az+b$, $a \neq 1$: $z'-\omega = a(z-\omega)$ avec $\omega = \frac{b}{1-a}$.
- **Rotation** de centre ω et d'angle θ : $z'-\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-\omega)$; **homothétie** de rapport $k \in \mathbb{R}^*$: $z'-\omega = k(z-\omega)$.
- **Réflexion** d'axe passant par O d'angle θ : $z' = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\overline{z}$.
- $|z-a| = r$: cercle de centre A et de rayon r ; $|z-a| = |z-b|$: médiatrice de $[AB]$.
- **Triangle équilatéral direct** $ABC \Leftrightarrow a+jb+j^2c = 0$, $j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$.

Correction de l'exercice 1 – Alignement et orthogonalité

a) Le quotient des affixes des vecteurs est réel :

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{4+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = 2 \in \mathbb{R}$$

- donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$: alignés, B milieu de $[AC]$.

b) Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de centre A : $d-a = \mathrm{i}(b-a) = \mathrm{i}(2+\mathrm{i}) = -1+2\mathrm{i}$, donc $d = 3\mathrm{i}$.

c) $e = b+d-a = 2+4\mathrm{i}$; $ABED$ est un parallélogramme avec un angle droit en A et $AB = AD$: c'est un **carré** de côté $\sqrt{5}$.

Réponse. $\frac{c-a}{b-a} = 2$; $D(3\mathrm{i})$; $ABED$ carré.

Correction de l'exercice 2 – Critère du triangle équilatéral

a) ABC est équilatéral direct si et seulement si C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = -j^2$ (car $j^2 = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$). L'égalité devient $c-a = -j^2(b-a)$, soit $c-a+j^2b-j^2a = 0$. Avec $-1-j^2 = j$:

$$ja+j^2b+c = 0 \Leftrightarrow a+jb+j^2c = 0$$

- (multiplier par j^2, en utilisant $j^3 = 1$).

c) $0+2j+j^2(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) : j^2 = \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$,
$j^2(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = \frac{(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})(1+\mathrm{i}\sqrt{3})}{2} = \frac{-1-2\mathrm{i}\sqrt{3}+3}{2} = 1-\mathrm{i}\sqrt{3}$, et $2j = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}$: somme nulle ✓.
ACB est équilatéral **indirect**.

Réponse. Équilatéral direct $\Leftrightarrow a+jb+j^2c = 0$.

Correction de l'exercice 3 – Similitude directe

a) $\omega = (1+\mathrm{i})\omega+1 \Leftrightarrow -\mathrm{i}\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \mathrm{i}$.

b) En soustrayant $\omega = (1+\mathrm{i})\omega+1$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$z' - \mathrm{i} = (1+\mathrm{i})(z-\mathrm{i}), \qquad 1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$$

— similitude de centre $\Omega(\mathrm{i})$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

c) $f(0)=1$, $f(1)=2+\mathrm{i}$, $f(\mathrm{i})=\mathrm{i}-1+1=\mathrm{i}$ (le point fixe !). Côtés images : $|f(1)-f(0)| = |1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$ (contre 1), $|f(\mathrm{i})-f(0)| = |-1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$ ✓.

Réponse. Centre i, rapport $\sqrt{2}$, angle $\frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 4 – Retrouver une homothétie

a) On cherche a, b avec $a+b=3$ et $a\mathrm{i}+b=-1+4\mathrm{i}$. En soustrayant :

$$a(\mathrm{i}-1) = -4+4\mathrm{i} \Longrightarrow a = \frac{4(-1+\mathrm{i})}{-1+\mathrm{i}} = 4, \qquad b=-1$$

— $f(z) = 4z-1$ (unique car le système est de Cramer, $A \neq B$).

b) $a=4$ est réel : homothétie de rapport 4, de centre $\omega = \frac{-1}{1-4} = \frac{1}{3}$.

c) $a'-\omega = 3-\frac{1}{3} = \frac{8}{3} = 4\left(1-\frac{1}{3}\right)$ ✓ : $\overrightarrow{\Omega A'} = 4\overrightarrow{\Omega A}$.

Réponse. $f(z) = 4z-1$: homothétie de centre $\frac{1}{3}$, de rapport 4.

Correction de l'exercice 5 – Cercle d'Apollonius

a) On élève au carré (les deux membres sont positifs) :

$$(x-1)^2 + y^2 = 4\left((x+1)^2+y^2\right) \Leftrightarrow 3x^2+3y^2+10x+3=0$$

b) En divisant par 3 et en complétant le carré : $\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9}$. Cercle de centre $K\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ et de rayon $\frac{4}{3}$.

c) $z=-\frac{1}{3} : \frac{4}{3} = 2\cdot\frac{2}{3}$ ✓ ; $z=-3 : 4 = 2\cdot 2$ ✓. Ce sont les points de l'axe réel qui partagent $[AB]$ (intérieurement et extérieurement) dans le rapport 2 : ils forment un diamètre du cercle.

Réponse. Cercle de centre $-\frac{5}{3}$ et de rayon $\frac{4}{3}$.

Correction de l'exercice 6 – Angle droit et cercle

a) $\arg\frac{z-\mathrm{i}}{z-1} \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$; imaginaire pur non nul ⇔ angle $\pm\frac{\pi}{2}$: $A\hat{M}B$ est droit.

b) M décrit le **cercle de diamètre** $[AB]$ privé de A et B : centre $\frac{1+\mathrm{i}}{2}$, rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Calcul : la partie réelle de $\frac{(z-\mathrm{i})(\overline{z}-1)}{|z-1|^2}$ doit être nulle, soit

$$\mathrm{Re}((x+\mathrm{i}(y-1))(x-1-\mathrm{i}y)) = x(x-1)+y(y-1) = 0$$

— c'est-à-dire $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ✓.

Réponse. Cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B.

Correction de l'exercice 7 – Une inversion

a) $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\overline{z} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, $\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Le cercle unité est fixé point par point ($\frac{1}{\overline{z}} = z$ quand $|z|=1$).

b) $w = \varphi(z) \Leftrightarrow z = \frac{1}{\overline{w}}$. Alors $|z-1|=1$ s'écrit $\left|\frac{1}{\overline{w}} - 1\right| = 1 \Leftrightarrow |1-\overline{w}| = |\overline{w}|$, soit

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$|w-1| = |w|$$

— W est équidistant de 0 et de 1 : c'est la médiatrice, $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}$.

c) $\varphi(1+\mathrm{i}) = \frac{1}{1-\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$, de partie réelle $\frac{1}{2}$ ✓.

Réponse. $\varphi(C)$ est la droite $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 8 – Image d'une droite par z ↦ z²

a) $(1+\mathrm{i}t)^2 = 1 - t^2 + 2\mathrm{i}t$: $X = 1-t^2$, $Y = 2t$.

b) $t = \frac{Y}{2}$, d'où

$$X = 1 - \frac{Y^2}{4}$$

— une **parabole** d'axe réel, tournée vers la gauche, de sommet $(1,0)$ et de foyer O.

c) $z = t + \mathrm{i}$: $z^2 = t^2 - 1 + 2\mathrm{i}t$, soit $X = \frac{Y^2}{4} - 1$, parabole tournée vers la droite.
Intersection : $1 - \frac{Y^2}{4} = \frac{Y^2}{4} - 1$, $Y = \pm 2$, $X = 0$: points $2\mathrm{i} = (1+\mathrm{i})^2$ et $-2\mathrm{i} = (1-\mathrm{i})^2$. Les deux paraboles s'y coupent **à angle droit** (g conserve les angles là où $g' \neq 0$).

Réponse. $g(D)$: parabole $X = 1 - \frac{Y^2}{4}$; l'autre : $X = \frac{Y^2}{4} - 1$; intersection $\pm 2\mathrm{i}$.

Correction de l'exercice 9 – Cercle circonscrit

a) $|z| = |z-4|$: médiatrice $x = 2$. Puis $|z|^2 = |z - 2 - 2\mathrm{i}|^2$ avec $z = 2 + \mathrm{i}y$:

$$4 + y^2 = (y-2)^2 \Leftrightarrow 4 = -4y + 4 \Leftrightarrow y = 0$$

— $\Omega(2)$, rayon $|2| = 2$.

b) $\frac{a-c}{b-c} = \frac{-2-2\mathrm{i}}{2-2\mathrm{i}} = \frac{-(1+\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$: imaginaire pur de module 1 : $CA = CB$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{2}$. Triangle **rectangle isocèle en** C.

c) L'hypoténuse $[AB]$ est un diamètre du cercle circonscrit : centre $\frac{a+b}{2} = 2$, rayon $\frac{AB}{2} = 2$ ✓.

Réponse. $\Omega(2)$, rayon 2 ; triangle rectangle isocèle en C.

Correction de l'exercice 10 – Composer deux rotations

a) $r_1(z) = \mathrm{i}z$; $r_2(z) - 1 = \mathrm{i}(z-1)$, soit $r_2(z) = \mathrm{i}z + 1 - \mathrm{i}$.

b) On compose :

$$r_2(r_1(z)) = \mathrm{i}(\mathrm{i}z) + 1 - \mathrm{i} = -z + 1 - \mathrm{i}$$

— Angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$: **symétrie centrale** de centre ω avec $2\omega = 1 - \mathrm{i}$, soit $\omega = \frac{1-\mathrm{i}}{2}$.

c) $r_1(r_2(z)) = \mathrm{i}(\mathrm{i}z + 1 - \mathrm{i}) = -z + \mathrm{i} + 1$: symétrie de centre $\frac{1+\mathrm{i}}{2}$. Les composées **diffèrent** : la composition des rotations n'est pas commutative (seul l'angle total π est le même).

Réponse. $r_2 \circ r_1$: symétrie de centre $\frac{1-\mathrm{i}}{2}$; $r_1 \circ r_2$: centre $\frac{1+\mathrm{i}}{2}$.

Correction de l'exercice 11 – Construire un carré

a) Dans un carré direct, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ se déduisent de $\overrightarrow{AB}$ par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$c = b + \mathrm{i}(b-a) = 3 + \mathrm{i} + \mathrm{i}(2+\mathrm{i}) = 2 + 3\mathrm{i}, \qquad d = a + \mathrm{i}(b-a) = 2\mathrm{i}$$

b) I milieu de $[AC]$: $\frac{1+2+3\mathrm{i}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$. $a - i = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}$ et $b - i = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$; $\frac{b-i}{a-i} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}}{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}} = \mathrm{i}$ (vérifier : $\mathrm{i}\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{3}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}$ ✓) : orthogonaux et de même longueur.

c) $AB^2 = |2+\mathrm{i}|^2 = 5$.

Réponse. $C(2+3\mathrm{i})$, $D(2\mathrm{i})$, centre $\frac{3}{2}(1+\mathrm{i})$, aire 5.

Correction de l’exercice 12 – Orthocentre d’un triangle inscrit

a) On conjugue :

$$\overline{\left(\frac{b+c}{b-c}\right)} = \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}} = \frac{c+b}{c-b} = -\frac{b+c}{b-c}$$

— le nombre est imaginaire pur.

b) $h - a = b + c$, donc $\frac{h-a}{b-c} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$: $(AH) \perp (BC)$ (ou $H = A$). Par symétrie des rôles, $(BH) \perp (CA)$: H est sur deux hauteurs, c’est l’orthocentre.

c) $h = 1 + \mathrm{i} - 1 = \mathrm{i}$: $H = B$. En effet $[AC]$ est un diamètre, le triangle est rectangle en B, et l’orthocentre d’un triangle rectangle est le sommet de l’angle droit.

Réponse. $H(a+b+c)$ est l’orthocentre ; c) $H = B$.

Correction de l’exercice 13 – Intersection de deux cercles

a) $|z|^2 = 4$ et $|z-2|^2 = |z|^2 - 4\,\mathrm{Re}\,z + 4 = 4$, d’où $4\,\mathrm{Re}\,z = 4$.

b) $z = 1 + \mathrm{i}y$ avec $1 + y^2 = 4$:

$$z = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\,\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}$$

c) Les trois côtés mesurent 2 : triangle **équilatéral** (d’où l’argument $\frac{\pi}{3}$). C’est la construction classique du triangle équilatéral au compas.

Réponse. $z = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}$; triangle équilatéral.

Correction de l’exercice 14 – Réflexions et rotations

a) Si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ ($r \in \mathbb{R}$), $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\overline{z} = r\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = z$. Pour $z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ quelconque, l’image est $\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta-\varphi)}$: même module, angle symétrique par rapport à θ.

b) $\theta = \frac{\pi}{4}$: $s(z) = \mathrm{i}\overline{z}$, et $\mathrm{i}(x - \mathrm{i}y) = y + \mathrm{i}x$ ✓.

c) On compose :

$$s_\beta(s_\alpha(z)) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta}\,\overline{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\overline{z}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\beta-\alpha)}z$$

— rotation de centre O et d’angle $2(\beta-\alpha)$: le double de l’angle entre les deux axes.

Réponse. $s_\beta \circ s_\alpha$: rotation d’angle $2(\beta-\alpha)$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : une similitude et ses itérées

a) $b = f(0) = 1 + \mathrm{i}$ et $2a + b = 1 + 3\mathrm{i}$, donc $a = \mathrm{i}$: $f(z) = \mathrm{i}z + 1 + \mathrm{i}$.

b) $|a| = 1$: rotation, d’angle $\frac{\pi}{2}$, de centre le point fixe :

$$\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $f(z) - \mathrm{i} = \mathrm{i}(z - \mathrm{i})$ donc $f^{\circ n}(z) - \mathrm{i} = \mathrm{i}^n(z - \mathrm{i})$: $f \circ f$ est la symétrie de centre i ($f \circ f(z) = -z + 2\mathrm{i}$) et $f^{\circ 4} = \mathrm{id}$ (quatre quarts de tour).

d) Une rotation conserve distances et formes : le cercle unité devient le cercle de centre $f(0) = 1 + \mathrm{i}$ et de rayon 1 ; le carré devient le carré de sommets $f(0) = 1 + \mathrm{i}$, $f(1) = 1 + 2\mathrm{i}$, $f(1 + \mathrm{i}) = 2\mathrm{i}$, $f(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$.

Réponse. $f(z) = \mathrm{i}z + 1 + \mathrm{i}$: rotation de centre i, d'angle $\frac{\pi}{2}$; $f^{\circ 4} = \mathrm{id}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).