Plaquette 1 – Module, argument, exponentielle complexe et racines de l'unité

Nombres complexes — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formes et opérations.

— $z = a + \mathrm{i}b$ avec $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$; conjugué $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.

— **Module** : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, avec $|z|^2 = z\overline{z}$ et $|zz'| = |z||z'|$.

— **Forme exponentielle** : $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ défini modulo 2π.

— **Formule d'Euler** :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \qquad \cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

— **Formule de Moivre** : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$, c'est-à-dire $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$.

— **Factorisation de l'angle moitié** :

$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} \qquad 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = -2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$$

— **Racines n-ièmes de l'unité** : les n solutions de $z^n = 1$ sont $\omega_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Leur **somme est nulle** dès que $n \geq 2$, et elles forment un polygone régulier inscrit dans le cercle unité.

— **Équation du second degré** $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients réels et $\Delta < 0$: racines $\dfrac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$, **conjuguées** l'une de l'autre.

— **Interprétation géométrique** : $|z - z'|$ est la distance entre les points d'affixes z et z' ; $\arg\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Correction de l'exercice 1 – Forme algébrique

On multiplie numérateur et dénominateur par le **conjugué** du dénominateur.

$$z = \frac{(2 + 3\mathrm{i})(1 + \mathrm{i})}{(1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i})}$$

— Dénominateur : $(1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i}) = 1 - \mathrm{i}^2 = 2$.

— Numérateur : $2 + 2\mathrm{i} + 3\mathrm{i} + 3\mathrm{i}^2 = 2 + 5\mathrm{i} - 3 = -1 + 5\mathrm{i}$.

— Donc $z = \dfrac{-1 + 5\mathrm{i}}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\mathrm{i}$.

— **Contrôle par les modules** : $|2 + 3\mathrm{i}| = \sqrt{13}$, $|1 - \mathrm{i}| = \sqrt{2}$, donc $|z| = \sqrt{6{,}5} \approx 2{,}550$. Et $\sqrt{0{,}25 + 6{,}25} = \sqrt{6{,}5}$. Cohérent.

Réponse. $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\mathrm{i}$.

Correction de l'exercice 2 – Forme exponentielle

— **Module** : $|z| = \sqrt{1 + 3} = 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— On factorise : $z = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$.

— On reconnaît $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta = \frac{\pi}{3}$.

— **Conclusion** : $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$.

— **Contrôle** : $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2(0{,}5 + 0{,}866\mathrm{i}) = 1 + 1{,}732\mathrm{i}$. Cohérent avec $\sqrt{3} \approx 1{,}732$.

— **Méthode** : toujours calculer le module d'abord, puis factoriser — le couple $(\cos, \sin)$ obtenu identifie l'argument sans ambiguïté.

Réponse. $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$.

Correction de l'exercice 3 – Puissance par Moivre

On passe en forme exponentielle avant d'élever à la puissance.

— $|1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$ et $\arg(1 + \mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}$, donc $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$.

— **Moivre** : $(1 + \mathrm{i})^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}\mathrm{e}^{10\mathrm{i}\pi/4} = 32\,\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/2}$.

— On réduit l'argument : $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$, donc $\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$.

— **Résultat** : $(1 + \mathrm{i})^{10} = 32\mathrm{i}$.

— **Contrôle** : $(1 + \mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$, donc $(1 + \mathrm{i})^{10} = (2\mathrm{i})^5 = 32\,\mathrm{i}^5 = 32\mathrm{i}$. Cohérent.

Réponse. $32\mathrm{i}$.

Correction de l'exercice 4 – Équation du second degré

Discriminant : $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$.

— Les racines sont $z = \frac{2 \pm \mathrm{i}\sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4\mathrm{i}}{2} = 1 \pm 2\mathrm{i}$.

— **Vérification** : somme $= 2 = -\frac{b}{a}$ et produit $= (1 + 2\mathrm{i})(1 - 2\mathrm{i}) = 1 + 4 = 5 = \frac{c}{a}$. Cohérent.

— Les deux racines sont **conjuguées**, ce qui est automatique pour un polynôme à coefficients **réels**.

— **Module commun** : $|1 \pm 2\mathrm{i}| = \sqrt{5}$, soit $\sqrt{\frac{c}{a}}$ — autre contrôle rapide.

Réponse. $z = 1 + 2\mathrm{i}$ et $z = 1 - 2\mathrm{i}$.

Correction de l'exercice 5 – Racines cubiques de l'unité

Résolution : les solutions sont $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/3}$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$, soit

— $z_0 = 1$,

— $z_1 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = j$,

— $z_2 = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \bar{j} = j^2$.

Somme : $1 + j + j^2$.

— **Méthode algébrique** : j est racine de $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$, et $j \neq 1$, donc $j^2 + j + 1 = 0$.

— **Vérification numérique** : $1 - 0{,}5 - 0{,}5 = 0$ pour la partie réelle et $0{,}866 - 0{,}866 = 0$ pour l'imaginaire.

— **Résultat** : $1 + j + j^2 = 0$ — c'est la relation fondamentale sur j, à connaître par cœur.

Réponse. $\{1, j, j^2\}$ et $1 + j + j^2 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Racines n-ièmes

On écrit le second membre sous forme exponentielle : $-16 = 16\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

— On cherche $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r^4 = 16$ et $4\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$.

— Donc $r = 2$ et $\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

— **Les quatre solutions** :

$$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4},\quad 2\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4},\quad 2\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/4},\quad 2\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/4}$$

— Formes algébriques : $\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$, $\sqrt{2}(-1+\mathrm{i})$, $\sqrt{2}(-1-\mathrm{i})$, $\sqrt{2}(1-\mathrm{i})$.

— **Contrôle** : $\left(\sqrt{2}(1+\mathrm{i})\right)^4 = 4(1+\mathrm{i})^4 = 4\times(2\mathrm{i})^2 = 4\times(-4) = -16$. Cohérent.

— Les quatre points forment un **carré** de centre O inscrit dans le cercle de rayon 2.

Réponse. $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4 + k\pi/2)}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Correction de l'exercice 7 – Linéarisation

On part de $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$ et on élève au cube.

— $\cos^3\theta = \dfrac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^3$.

— **Binôme** : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ avec $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $b = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$:

$$\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta}$$

— On regroupe les termes conjugués : $2\cos 3\theta + 6\cos\theta$.

— **Résultat** : $\cos^3\theta = \dfrac{2\cos 3\theta + 6\cos\theta}{8} = \dfrac{\cos 3\theta + 3\cos\theta}{4}$.

— **Contrôle en** $\theta = 0$: membre de gauche 1, membre de droite $\dfrac{1+3}{4} = 1$. En $\theta = \dfrac{\pi}{3}$: gauche $\dfrac{1}{8}$, droite $\dfrac{-1+1{,}5}{4} = \dfrac{0{,}5}{4} = 0{,}125$. Cohérent.

— **À quoi ça sert** : linéariser permet d'**intégrer** les puissances de cos et sin.

Réponse. $\cos^3\theta = \dfrac{\cos 3\theta + 3\cos\theta}{4}$.

Correction de l'exercice 8 – Formule de Moivre et polynômes de Tchebychev

Moivre : $\cos 3\theta + \mathrm{i}\sin 3\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3$.

— On développe : $\cos^3\theta + 3\mathrm{i}\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - \mathrm{i}\sin^3\theta$.

— **Partie réelle** : $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$.

— On remplace $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

— **Contrôle en** $\theta = 0$: $4 - 3 = 1 = \cos 0$. En $\theta = \dfrac{\pi}{2}$: $0 - 0 = 0 = \cos\dfrac{3\pi}{2}$. Cohérent.

— C'est le **polynôme de Tchebychev** $T_3(X) = 4X^3 - 3X$.

— **Ne pas confondre** avec l'exercice précédent : ici on exprime $\cos n\theta$ **en fonction de** $\cos\theta$ (Moivre) ; là on linéarisait $\cos^n\theta$ (Euler).

Réponse. $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

Correction de l'exercice 9 – Somme géométrique complexe

C'est une **somme géométrique** de raison $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$S = \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$$

— **Factorisation de l'angle moitié** au numérateur et au dénominateur :

$$S = \frac{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta/2}}{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}} = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\theta/2}$$

— En prenant la **partie réelle** :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{(n-1)\theta}{2}\right)$$

— **Contrôle** avec $n = 2$: la formule donne $\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 + \cos\theta$. C'est bien $\cos 0 + \cos\theta$. Cohérent.

Réponse. $S = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\theta/2}$.

Correction de l'exercice 10 – Interprétation géométrique

On calcule les affixes des vecteurs, puis leur rapport.

— $b - a = 2 + 2\mathrm{i}$, donc $AB = |2 + 2\mathrm{i}| = 2\sqrt{2} \approx 2{,}828$.

— $c - a = -2 + 2\mathrm{i}$, donc $AC = 2\sqrt{2}$. **Le triangle est isocèle en A.**

— **Angle en A** : $\frac{c-a}{b-a} = \frac{-2+2\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}} = \frac{(-2+2\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})}{8} = \frac{-4+4\mathrm{i}+4\mathrm{i}+4}{8} = \mathrm{i}$.

— Un rapport égal à i signifie : même longueur et angle de $\frac{\pi}{2}$.

— **Conclusion** : ABC est un triangle **rectangle isocèle en A**.

— **Contrôle par Pythagore** : $BC = |c - b| = |-4| = 4$ et $AB^2 + AC^2 = 8 + 8 = 16 = BC^2$. Cohérent.

Réponse. Rectangle isocèle en A.

Correction de l'exercice 11 – Ensemble de points

Lecture géométrique : notons A d'affixe 1 et B d'affixe $-\mathrm{i}$.

— L'égalité $|z - 1| = |z - (-\mathrm{i})|$ signifie $MA = MB$.

— L'ensemble cherché est donc la **médiatrice** du segment $[AB]$.

— **Équation cartésienne** : avec $z = x + \mathrm{i}y$,

$$(x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y+1)^2$$

— En développant : $x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1$, soit $-2x = 2y$, donc $y = -x$.

— **Contrôle** : le milieu de $[AB]$ a pour affixe $\frac{1-\mathrm{i}}{2}$, soit le point $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, qui vérifie bien $y = -x$. Cohérent.

Réponse. La droite d'équation $y = -x$ (médiatrice de $[AB]$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Racine carrée sous forme algébrique

a) On cherche $\delta = x + \mathrm{i}y$ avec $\delta^2 = 3 + 4\mathrm{i}$. On écrit trois équations : parties réelle et imaginaire, et **égalité des modules** :

$$x^2 - y^2 = 3, \qquad 2xy = 4, \qquad x^2 + y^2 = |3 + 4\mathrm{i}| = 5$$

— En additionnant et soustrayant : $x^2 = 4$, $y^2 = 1$; $xy = 2 > 0$ impose le même signe. $\delta = \pm(2 + \mathrm{i})$.

— Contrôle : $(2 + \mathrm{i})^2 = 4 + 4\mathrm{i} - 1 = 3 + 4\mathrm{i}$ ✓.

b) $\Delta = 1 + 4\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\right) = 3 + 4\mathrm{i} = (2 + \mathrm{i})^2$, donc $z = \frac{-1 \pm (2 + \mathrm{i})}{2}$: $z_1 = \frac{1 + \mathrm{i}}{2}$ et $z_2 = \frac{-3 - \mathrm{i}}{2}$.
Contrôle : $z_1 + z_2 = -1$ ✓.

Réponse. $\pm(2 + \mathrm{i})$; $z = \frac{1 + \mathrm{i}}{2}$ ou $\frac{-3 - \mathrm{i}}{2}$.

Correction de l'exercice 13 – Rotation

a) Écriture complexe d'une rotation de centre Ω et d'angle θ :

$$z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$$

— Ici $a' - \omega = \mathrm{i}(a - \omega) = \mathrm{i} \times 2 = 2\mathrm{i}$, donc $a' = 1 + 3\mathrm{i}$.

b) On cherche un point fixe : $\omega = \mathrm{i}\omega + 2 \Leftrightarrow \omega(1 - \mathrm{i}) = 2 \Leftrightarrow \omega = \frac{2}{1 - \mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i}$. Alors $z' - \omega = \mathrm{i}z + 2 - (\mathrm{i}\omega + 2) = \mathrm{i}(z - \omega)$: rotation de centre $1 + \mathrm{i}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (c'est celle du a).

Réponse. $a' = 1 + 3\mathrm{i}$; $z \mapsto \mathrm{i}z + 2$: rotation de centre $1 + \mathrm{i}$, d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 14 – Inégalité triangulaire

a) $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})$ et $\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leq |z\overline{w}| = |z||w|$:

$$|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$$

— Égalité si et seulement si $z\overline{w} \in \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire z et w ont **même direction** (l'un est un multiple positif de l'autre, ou l'un est nul).

b) $|z - (3 - 4\mathrm{i})| \leq |z| + |3 - 4\mathrm{i}| \leq 1 + 5 = 6$. Égalité si $|z| = 1$ et z, $-(3 - 4\mathrm{i})$ de même direction : $z_0 = \frac{-3 + 4\mathrm{i}}{5}$. Maximum 6 : le point du cercle diamétralement opposé à la direction de $3 - 4\mathrm{i}$.

Réponse. Égalité si z et w sont positivement liés ; maximum 6 en $z_0 = \frac{-3 + 4\mathrm{i}}{5}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : équation de degré 3

Factorisation. Puisque 1 est racine, $z - 1$ divise le polynôme.

— Division : $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = (z - 1)(z^2 - 2z + 2)$.

— **Contrôle du développement** :
$(z - 1)(z^2 - 2z + 2) = z^3 - 2z^2 + 2z - z^2 + 2z - 2 = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$. Cohérent.

— **Second facteur** : $z^2 - 2z + 2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$, d'où $z = \frac{2 \pm 2\mathrm{i}}{2} = 1 \pm \mathrm{i}$.

— **Les trois solutions** : 1, $1 + \mathrm{i}$, $1 - \mathrm{i}$.

— **Contrôle par les relations coefficients-racines** : somme $= 1 + (1 + \mathrm{i}) + (1 - \mathrm{i}) = 3 = -\frac{-3}{1}$; produit $= 1 \times (1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i}) = 2 = -\frac{-2}{1}$. Cohérent.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Remarque** : les trois racines ont pour partie réelle 1 — elles sont alignées sur la verticale d'abscisse 1.

Réponse. $z \in \{1,\ 1+\mathrm{i},\ 1-\mathrm{i}\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).