Plaquette 3 – Équations algébriques et racines n-ièmes

Nombres complexes — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

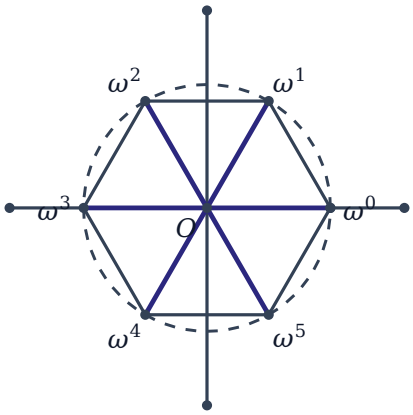
Pour $z^n = a$: écrire $a = re^{i\alpha}$; les solutions sont $r^{1/n}e^{i(\alpha+2k\pi)/n}$, $k = 0, \dots, n-1$, sommets d'un **polygone régulier**. Pour $z^2 = \Delta$ avec Δ sous forme algébrique, résoudre le système $x^2 - y^2 = \mathrm{Re}\,\Delta$, $2xy = \mathrm{Im}\,\Delta$, $x^2 + y^2 = |\Delta|$. Pour une équation du type $A(z)^n = B(z)^n$, poser $\frac{A(z)}{B(z)} = \omega$ racine n-ième de l'unité. Pour les **sommes et produits** portant sur les racines ω^k, utiliser $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$ et $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega^k)$.

Exercice 1 – Racines sixièmes de l'unité

a) Résoudre $z^6 = 1$ et représenter les solutions.

b) Regrouper les racines conjuguées pour factoriser $X^6 - 1$ en produit de polynômes réels irréductibles.

c) Vérifier la factorisation par un calcul direct à partir de $X^6 - 1 = (X^3 - 1)(X^3 + 1)$.

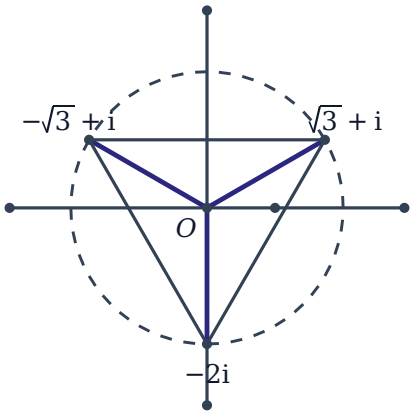


Les racines sixièmes de l'unité : un hexagone régulier.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 2 – Racines cubiques d’un imaginaire pur

Résoudre $z^3 = 8\mathrm{i}$; donner les solutions sous forme algébrique et les représenter.



Les trois racines cubiques de $8\mathrm{i}$ sur le cercle de rayon 2.

Exercice 3 – Sommes de puissances des racines de l’unité

Soit $n \geq 2$ et $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$.

a) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ selon que n divise p ou non.

b) Calculer le produit $\prod_{k=0}^{n-1} \omega^{k}$.

c) Application : montrer que $\sum_{k \geq 0} \binom{n}{3k} = \dfrac{2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}}{3}$ (considérer $(1+1)^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n$ avec $j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$). Vérifier pour $n = 6$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

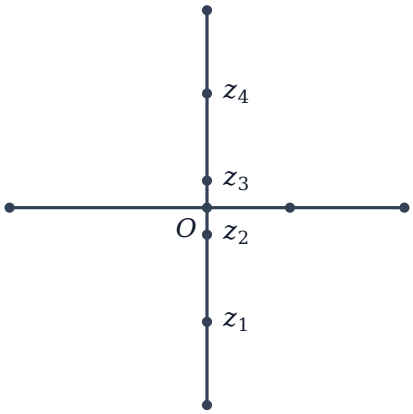
Exercice 4 – L’équation $(z+1)^n = (z-1)^n$

Soit $n \geq 2$. On résout $(z+1)^n = (z-1)^n$.

a) Montrer que $z = 1$ n’est pas solution et que l’équation équivaut à $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$.

b) En déduire que les solutions sont $z_k = -\mathrm{i}\cot\frac{k\pi}{n}$, $k = 1, \dots, n-1$.

c) Représenter les solutions pour $n = 5$. Pourquoi sont-elles toutes imaginaires pures ?



Pour $n = 5$: quatre solutions sur l'axe imaginaire.

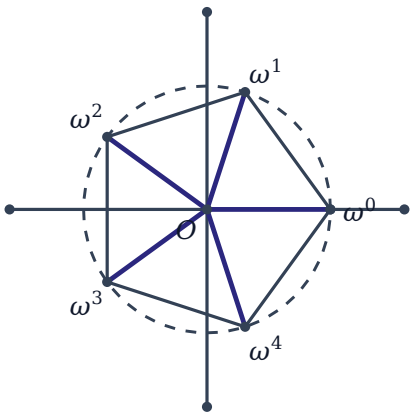
Exercice 5 – Le cosinus de 2π/5

Soit $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/5}$ et $u = \omega + \omega^4$, $v = \omega^2 + \omega^3$.

a) Montrer que $u = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $v = 2\cos\frac{4\pi}{5}$.

b) Calculer $u + v$ et uv (utiliser $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$).

c) En déduire $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et la longueur du côté d’un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1.



Le pentagone régulier des racines cinquièmes de l'unité.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Un produit de sinus

Soit $n \geq 2$ et $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$.

a) Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1}(X - \omega^k) = 1 + X + \ldots + X^{n-1}$.

b) En évaluant en $X = 1$, en déduire $\prod_{k=1}^{n-1}|1 - \omega^k| = n$.

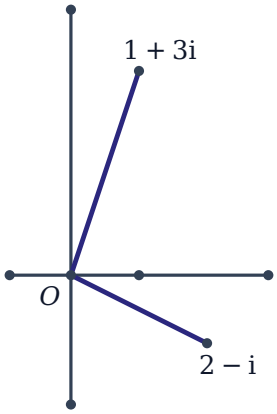
c) En déduire $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$. Vérifier pour $n = 3$ et $n = 4$.

Exercice 7 – Second degré à coefficients complexes

Résoudre $z^2 - (3 + 2\mathrm{i})z + 5 + 5\mathrm{i} = 0$.

a) Calculer le discriminant et en chercher une racine carrée sous forme algébrique.

b) En déduire les solutions et vérifier les relations coefficients-racines.



Les deux solutions ; elles ne sont pas conjuguées (coefficients non réels).

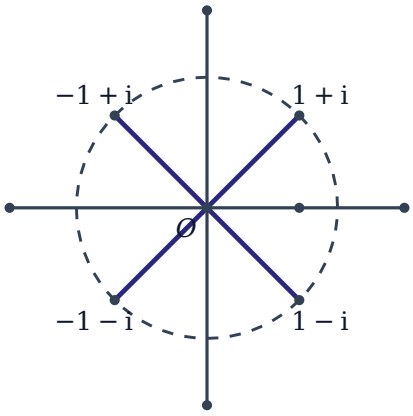
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Identité de Sophie Germain

a) Résoudre $z^4 = -4$ dans $\mathbb{C}$.

b) En regroupant les racines conjuguées, en déduire la factorisation $X^4 + 4 = (X^2 + 2X + 2)(X^2 - 2X + 2)$.

c) Retrouver cette factorisation en écrivant $X^4 + 4 = (X^2 + 2)^2 - 4X^2$. Application : montrer que $n^4 + 4$ n'est premier que pour $n = 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).



Les quatre racines de $z^4 = -4$: un carré.

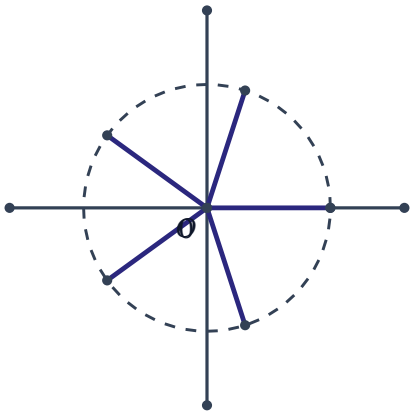
Exercice 9 – Puissance égale au conjugué

Soit $n \geq 1$. Résoudre $z^n = \overline{z}$.

a) Montrer qu'une solution non nulle est de module 1.

b) En déduire que les solutions non nulles sont les racines $(n + 1)$-ièmes de l'unité.

c) Combien y a-t-il de solutions ? Les représenter pour $n = 4$.



Pour $n = 4$: 0 et les cinq racines cinquièmes de l'unité.

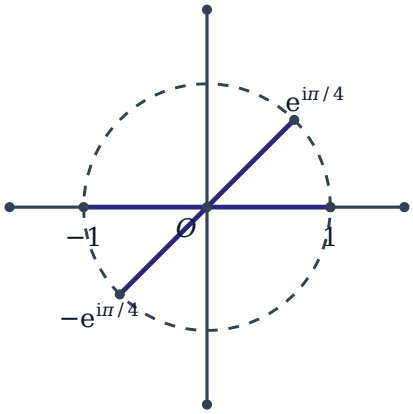
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Équation bicarrée complexe

Résoudre $z^4 - (1+\mathrm{i})z^2 + \mathrm{i} = 0$.

a) Poser $Z = z^2$ et résoudre l'équation du second degré obtenue (on pourra repérer une racine évidente).

b) En déduire les quatre solutions et les représenter.



Les quatre solutions, toutes de module 1.

Exercice 11 – Racines cubiques de 1 + i

a) Écrire $1+\mathrm{i}$ sous forme exponentielle et en déduire ses racines cubiques.

b) Donner leur module avec 4 décimales.

c) Montrer que ces racines sont les images de l'une d'entre elles par les rotations de centre O et d'angles $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$.

Exercice 12 – Factorisation réelle de $X^5 - 1$

a) Factoriser $X^5 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

b) En regroupant les racines conjuguées, écrire sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ avec $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

c) Remplacer ces cosinus par leurs valeurs ($\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$) et vérifier en développant le produit des deux trinômes.

Exercice 13 – Polygones inscrits et nombre π

On considère le polygone régulier à n côtés dont les sommets sont les racines n-ièmes de l'unité.

a) Montrer que son périmètre vaut $p_n = 2n\sin\frac{\pi}{n}$.

b) Calculer p_6, p_{12} et p_{100}, et la limite de p_n.

c) Montrer que l'aire du polygone vaut $a_n = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$ et donner sa limite. Commenter (méthode d'Archimède).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Somme des racines d'un polynôme

a) Soit $P = X^3 - 2X^2 + 3X - 4$, de racines complexes z_1, z_2, z_3. Sans les calculer, donner $z_1 + z_2 + z_3$, $z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$ et $z_1z_2z_3$.

b) En déduire $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

c) Montrer que P a exactement une racine réelle et deux racines complexes conjuguées (étudier P sur $\mathbb{R}$).

Exercice 15 – Synthèse : produits et sommes sur les racines de l'unité

Soit $n \geq 2$, $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$ et $Q(X) = \prod_{k=1}^{n-1}(X - \omega^k) = 1 + X + \ldots + X^{n-1}$.

a) Calculer $\prod_{k=1}^{n-1}(2 - \omega^k)$ et vérifier pour $n = 4$.

b) Calculer $\prod_{k=1}^{n-1}(1 + \omega^k)$ selon la parité de n.

c) En utilisant $\frac{Q'}{Q} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{X - \omega^k}$, montrer que $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \omega^k} = \frac{n-1}{2}$. Vérifier pour $n = 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).