Plaquette 5 – Exponentielle complexe et applications

Nombres complexes — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

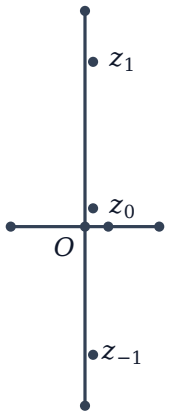
L'**exponentielle complexe** $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ transforme les sommes en produits ; elle a pour module $e^{\operatorname{Re} z}$ et pour argument $\operatorname{Im} z$. Pour résoudre $e^z = a$ ($a \neq 0$), on identifie module et argument : $z = \ln|a| + i(\arg a + 2k\pi)$. En **physique**, une grandeur sinusoïdale $A\cos(\omega t + \varphi)$ est la partie réelle de $Ae^{i\varphi}e^{i\omega t}$: additionner des signaux de même pulsation revient à additionner leurs **amplitudes complexes** (vecteurs de Fresnel). Pour les **sommes trigonométriques**, on reconnaît la partie réelle d'une somme géométrique.

Exercice 1 – Résoudre exp(z) = 1 + i

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = 1 + i$.

b) Représenter trois solutions. Comment sont-elles disposées ?

c) Résoudre de même $e^z = -2$ et $e^z = 0$.



Les solutions sont alignées verticalement, espacées de 2π.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 2 – Images de droites par l'exponentielle

a) Déterminer l'image par $z \mapsto \mathrm{e}^z$ de la droite horizontale $\operatorname{Im} z = b$.

b) Déterminer l'image de la droite verticale $\operatorname{Re} z = a$.

c) En déduire l'image du rectangle $[0, \ln 2] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et celle de la bande $\{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$.

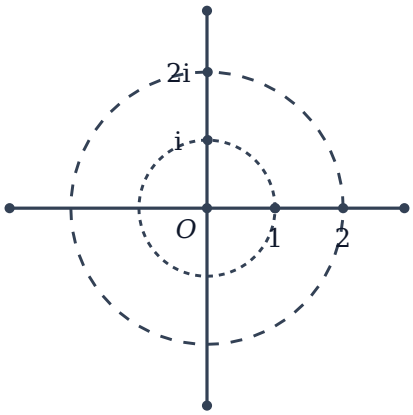


Image du rectangle : le quart de couronne $1 \le |w| \le 2$, $0 \le \arg w \le \frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 – Une équation en exp(z)

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\mathrm{e}^{2z} + \mathrm{e}^z + 1 = 0$.

a) Poser $w = \mathrm{e}^z$ et résoudre l'équation en w.

b) En déduire toutes les solutions z.

Exercice 4 – Cosinus d'un nombre complexe

On définit, pour $z \in \mathbb{C}$, $\cos z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$.

a) Montrer que $\cos(\mathrm{i}y) = \operatorname{ch} y$ pour y réel. Le cosinus est-il borné sur $\mathbb{C}$?

b) Résoudre $\cos z = 2$ (poser $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$).

c) Vérifier numériquement une solution.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

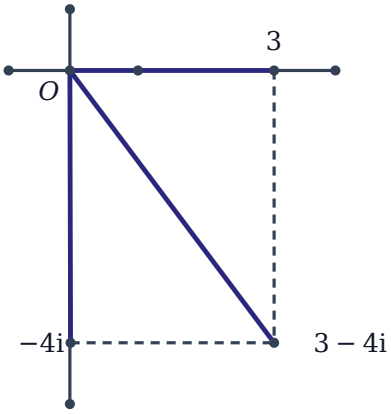
Exercice 5 – Somme de deux signaux

On superpose $s_1(t) = 3\cos\omega t$ et $s_2(t) = 4\sin\omega t$.

a) Écrire s_1 et s_2 comme parties réelles de $\underline{A_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ et $\underline{A_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$.

b) En déduire $s_1 + s_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$; donner A et φ.

c) Représenter les amplitudes complexes (vecteurs de Fresnel).



Vecteurs de Fresnel : l'amplitude complexe résultante $3-4\mathrm{i}$*, de module* 5*.*

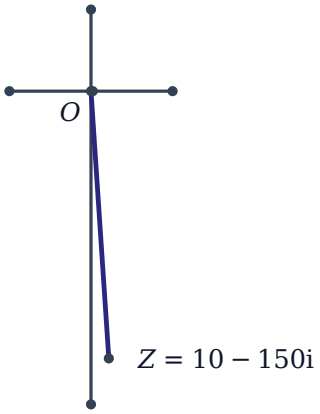
Exercice 6 – Impédance d’un circuit RLC

Un circuit série comporte $R = 10\ \Omega$, $L = 0{,}1$ H, $C = 10\ \mu$F.

a) Écrire son impédance complexe $Z(\omega)$.

b) Calculer Z et $|Z|$ pour $\omega = 500$ rad/s. Représenter Z dans le plan complexe.

c) Pour quelle pulsation ω_0 l’impédance est-elle réelle ? Que vaut alors $|Z|$? Interpréter.



À 500 *rad/s, l'impédance est surtout capacitive.*

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Somme de cosinus en progression arithmétique

Soit a, b réels avec $b \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et $C = \sum_{k=0}^{n} \cos(a + kb)$.

a) Écrire C comme partie réelle d'une somme géométrique.

b) Montrer que $C = \dfrac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}} \cos\left(a + \frac{nb}{2}\right)$.

c) Vérifier pour $a = 0{,}3$, $b = 0{,}7$, $n = 5$ ($C \approx -1{,}1607$).

Exercice 8 – Interférences de n ondes

n ondes de même amplitude 1 et de même pulsation arrivent en un point avec des déphasages $0, \varphi, 2\varphi, \ldots, (n-1)\varphi$. L'amplitude résultante est $A = \left|\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\varphi}\right|$.

a) Montrer que $A = \left|\dfrac{\sin(n\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}\right|$ pour $\varphi \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et $A = n$ sinon.

b) Cas $n = 2$: montrer que $A = 2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|$. Pour quels déphasages les ondes s'annulent-elles ?

c) Pour $n = 10$, comparer l'intensité A^2 en $\varphi = 0$ et en $\varphi = \frac{\pi}{10}$. Interpréter (réseau de diffraction).

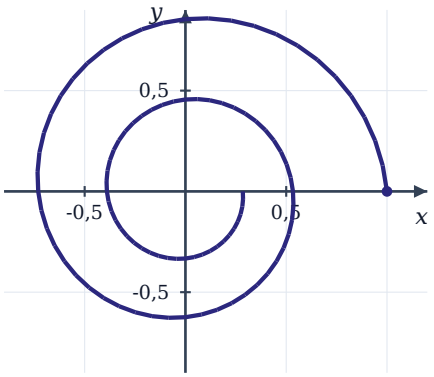
Exercice 9 – Spirale logarithmique

Soit $z(t) = e^{(-0{,}1 + i)t}$ pour $t \geq 0$.

a) Donner le module et un argument de $z(t)$. Décrire la courbe.

b) Montrer que $z'(t) = (-0{,}1 + i)z(t)$ et en déduire que l'angle entre le rayon $\overrightarrow{Oz}$ et la vitesse est constant. Le calculer.

c) Après combien de tours le module a-t-il été divisé par 10 ?



La spirale $z(t) = e^{(-0{,}1 + i)t}$ sur deux tours ($0 \leq t \leq 4\pi$), depuis $z(0) = 1$.

Exercice 10 – Produit de trois cosinus

a) À l'aide des formules d'Euler, linéariser $\cos a \cos b$.

b) Linéariser $\cos x \cos 2x \cos 3x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire $\int_0^{2\pi} \cos x \cos 2x \cos 3x \, \mathrm{d}x$.

Exercice 11 – Coefficients d'un polynôme trigonométrique

a) Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$ vaut 1 si $k = 0$ et 0 sinon ($k \in \mathbb{Z}$).

b) Soit $f(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$. Montrer que $c_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mx}\,\mathrm{d}x$.

c) Écrire $\cos^3 x$ sous la forme $\sum c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ et vérifier la formule de b) pour c_1.

Exercice 12 – Oscillations amorties

La position d'un oscillateur amorti est $x(t) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(-\alpha + \mathrm{i}\omega)t}\right) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\cos \omega t$ ($\alpha, \omega > 0$).

a) Montrer que $x(t+T) = \mathrm{e}^{-\alpha T} x(t)$ avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (pseudo-période).

b) En déduire que le rapport de deux maximums successifs est constant ; on appelle **décrément logarithmique** $\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)}$. L'exprimer.

c) Application : $\alpha = 0{,}5\ \mathrm{s}^{-1}$, $\omega = 2\pi$ rad/s. Combien de pseudo-périodes pour que l'amplitude soit divisée par 100 ?

Exercice 13 – Une équation trigonométrique par sommation

Résoudre $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

a) À l'aide de la somme de cosinus en progression arithmétique, montrer que, pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, le membre de gauche vaut $\dfrac{\sin \frac{3x}{2} \cos 2x}{\sin \frac{x}{2}}$.

b) En déduire les solutions.

c) Vérifier $x = \frac{2\pi}{3}$ et $x = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 14 – Formules d'addition retrouvées

a) En développant $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$, retrouver les formules de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

b) En déduire $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$.

c) Application : calculer $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : le réseau électrique triphasé

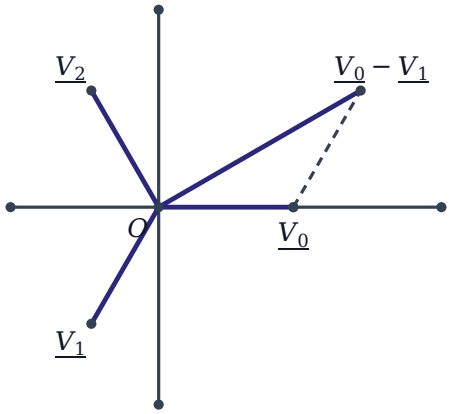
Le réseau triphasé délivre trois tensions $v_k(t) = V\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{2k\pi}{3}\right)$, $k = 0, 1, 2$, avec $V = 230$ V (tension efficace).

a) Écrire les amplitudes complexes $\underline{V_k}$ et montrer que $\underline{V_0} + \underline{V_1} + \underline{V_2} = 0$. Que peut-on dire de $v_0 + v_1 + v_2$?

b) La tension entre deux phases est $u(t) = v_0(t) - v_1(t)$. Calculer $|\underline{V_0} - \underline{V_1}|$ et en déduire la tension efficace entre phases.

c) Quel est le déphasage de u par rapport à v_0 ?

d) Représenter les trois amplitudes complexes et $\underline{V_0} - \underline{V_1}$.



Les trois phases (unité : $V\sqrt{2}$) et la tension composée, $\sqrt{3}$ fois plus grande.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).