Plaquette 2 – Formes trigonométriques, Moivre et Euler

Nombres complexes — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour **multiplier, diviser, élever à une puissance**, la forme exponentielle $re^{i\theta}$ est reine : modules multipliés, arguments ajoutés. Pour une **somme** $e^{ia} \pm e^{ib}$, on factorise par l'**angle moitié** $e^{i(a+b)/2}$. Les formules d'**Euler** ($\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$) servent à **linéariser** ; la formule de **Moivre** $(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$ sert à exprimer $\cos nx$, $\sin nx$, $\tan nx$ en fonction de $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$. Le **conjugué** traduit « être réel » ($\overline{z} = z$) ou « être de module 1 » ($\overline{z} = \dfrac{1}{z}$).

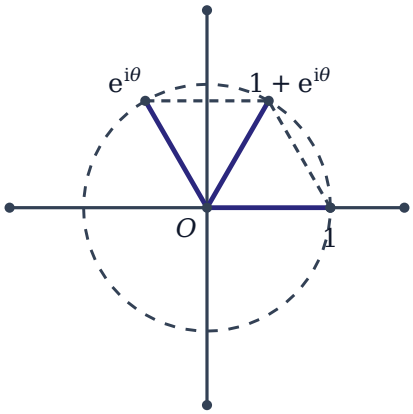
Exercice 1 – Somme de deux exponentielles

Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$.

a) Mettre $1 + e^{i\theta}$ sous forme trigonométrique en factorisant par $e^{i\theta/2}$. Donner son module et un argument.

b) Même question pour $1 - e^{i\theta}$ ($\theta \neq 0$). En déduire la longueur de la corde joignant deux points du cercle unité séparés par un angle θ.

c) Illustrer a) pour $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.



Pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$: le losange construit sur 1 et $e^{i\theta}$.

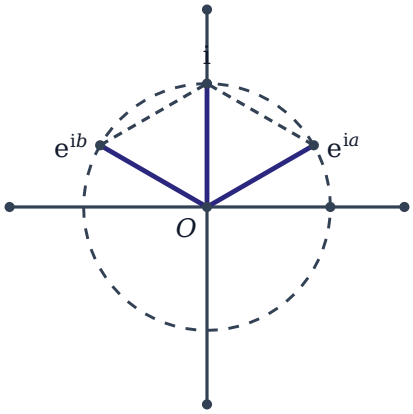
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 2 – Factoriser une somme de cosinus

a) Montrer que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = 2\cos\dfrac{a-b}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a+b}{2}}$.

b) En prenant les parties réelle et imaginaire, en déduire les formules de factorisation de $\cos a + \cos b$ et $\sin a + \sin b$.

c) Application : résoudre $\cos x + \cos 3x = 0$.



Exemple $a = \frac{\pi}{6}$, $b = \frac{5\pi}{6}$: la somme vaut $2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$.

Exercice 3 – Module et argument d'un quotient

Soit $z = \dfrac{(1+\mathrm{i})^5}{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^3}$.

a) Déterminer le module et un argument de $1+\mathrm{i}$ et de $\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

b) En déduire le module et un argument de z, puis sa forme algébrique.

c) Calculer de même $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{12}$.

Exercice 4 – Linéariser une puissance de sinus

a) Linéariser $\sin^5 x$ à l'aide des formules d'Euler.

b) En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^5 x\,\mathrm{d}x$.

c) Vérifier par une autre méthode (poser $u = \cos x$).

Exercice 5 – Tangente de l'angle triple

a) En développant $(1+\mathrm{i}t)^3$ avec $t = \tan x$, montrer que $\tan 3x = \dfrac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$ (là où les expressions ont un sens).

b) En déduire que $\tan\frac{\pi}{9}$, $\tan\frac{4\pi}{9}$ et $\tan\frac{7\pi}{9}$ sont racines de $t^3 - 3\sqrt{3}t^2 - 3t + \sqrt{3} = 0$.

c) Contrôler numériquement a) pour $x = 0{,}3$.

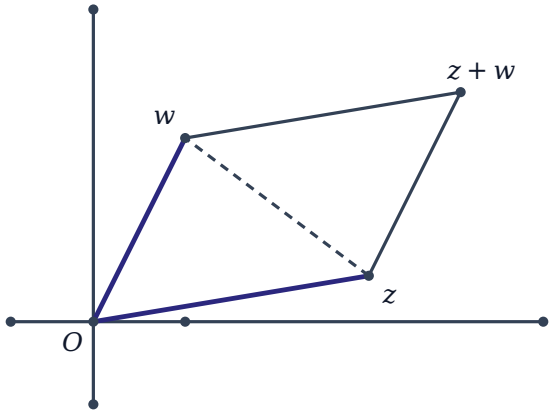
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Parallélogramme et identité

a) Montrer que pour tous $z, w \in \mathbb{C}$: $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$.

b) Interpréter géométriquement dans le parallélogramme construit sur z et w.

c) Application : un parallélogramme a des côtés de longueurs 3 et 5 et une diagonale de longueur 4. Calculer l'autre diagonale.



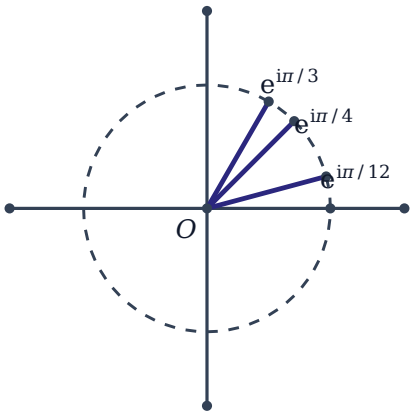
Diagonales $|z+w|$ (depuis O) et $|z-w|$ (pointillé).

Exercice 7 – Cosinus de π/12

a) Écrire $e^{i\pi/12}$ comme quotient de $e^{i\pi/3}$ et $e^{i\pi/4}$.

b) En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$ sous forme de radicaux.

c) Vérifier que $\cos^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{12} = 1$ et donner $\tan\frac{\pi}{12}$.



$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ sur le cercle unité.

Exercice 8 – Équation trigonométrique par les complexes

a) Montrer que $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \mathrm{Re}((1 - i\sqrt{3})e^{ix})$, puis que $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Résoudre $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$.

c) Plus généralement, écrire $a\cos x + b\sin x$ sous la forme $R\cos(x-\varphi)$ et donner le maximum de cette expression.

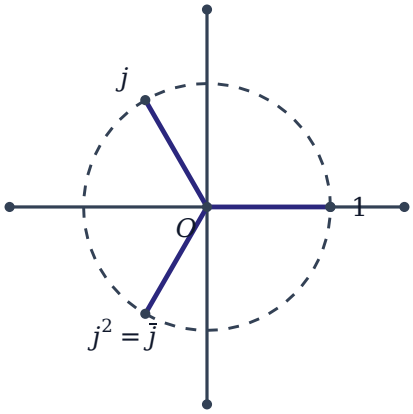
Exercice 9 – Nombres égaux au carré de leur conjugué

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\overline{z} = z^2$.

a) Montrer qu'une solution vérifie $|z| = 0$ ou $|z| = 1$.

b) Dans le cas $|z| = 1$, montrer que $z^3 = 1$.

c) Conclure et représenter les solutions.



Les solutions non nulles de $\overline{z} = z^2$: les racines cubiques de l'unité.

Exercice 10 – Somme de carrés de cosinus

Soit $n \geq 2$. On veut calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 \frac{k\pi}{n}$.

a) Linéariser $\cos^2$ et se ramener à $\sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n}$.

b) Calculer cette somme en reconnaissant la partie réelle d'une somme géométrique (ou la somme des racines n-ièmes de l'unité).

c) En déduire S_n. Vérifier pour $n = 2$ et $n = 5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

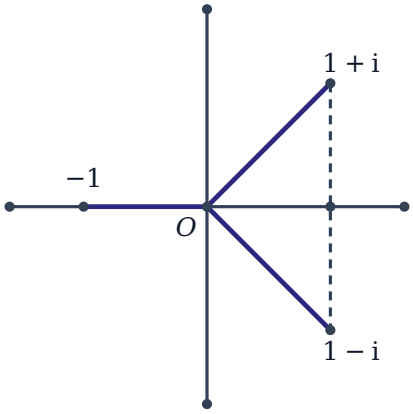
Exercice 11 – Racines conjuguées d'un polynôme réel

Soit $P(X) = X^3 - X^2 + 2$.

a) Vérifier que $1 + \mathrm{i}$ est racine de P.

b) Justifier que $1 - \mathrm{i}$ est aussi racine.

c) En déduire la factorisation de P sur $\mathbb{R}$ et sa troisième racine. Représenter les trois racines.



Les racines de P : une paire conjuguée, symétrique par rapport à l'axe réel.

Exercice 12 – Nombres de module 1

a) Montrer que $|z| = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$ (pour $z \neq 0$).

b) Soient z, w de module 1 avec $zw \neq -1$. Montrer que $\frac{z+w}{1+zw}$ est réel.

c) Soit z de module 1, $z \neq 1$. Montrer que $\frac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur, et l'exprimer à l'aide de θ si $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

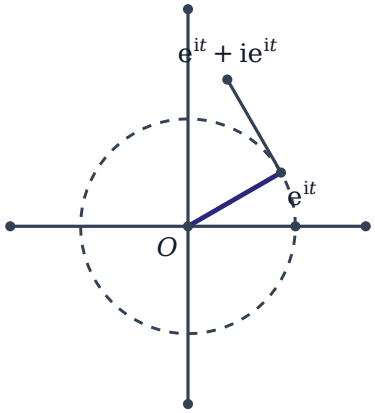
Exercice 13 – Parcourir le cercle unité

Soit $f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$ pour $t \in \mathbb{R}$.

a) Calculer $f'(t)$ et vérifier que $f'(t) = \mathrm{i}f(t)$.

b) En déduire que le vecteur vitesse est orthogonal au rayon et de norme 1. Interpréter.

c) Pour $g(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ (mouvement circulaire uniforme), calculer g' et g'' ; retrouver l'accélération centripète $R\omega^2$.



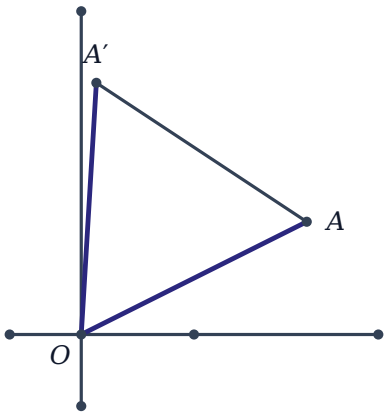
Le vecteur vitesse $\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, tangent au cercle.

Exercice 14 – Produit de nombres de module 1 et rotation

a) Montrer que multiplier par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ réalise la rotation de centre O et d'angle α.

b) Le point A d'affixe $2 + \mathrm{i}$ tourne de $\frac{\pi}{3}$ autour de O. Donner l'affixe de son image A' sous forme algébrique.

c) Montrer que le triangle OAA' est équilatéral.



La rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$: le triangle OAA'.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : une somme binomiale trigonométrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose $C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$.

a) Montrer que $C_n + \mathrm{i}S_n = (1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n$.

b) En utilisant l'angle moitié, en déduire $C_n = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2}$ et une expression de S_n.

c) Vérifier pour $n = 6$, $x = 0{,}7$ (on trouve $C_6 \approx -22{,}20$).

d) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos \frac{k\pi}{2}$ et vérifier pour $n = 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).