Plaquette 4 – Géométrie et transformations du plan complexe

Nombres complexes — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Tout se lit sur le quotient $q = \dfrac{c-a}{b-a}$: son **module** est le rapport des longueurs $\dfrac{AC}{AB}$, son **argument** l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Alignés $\Leftrightarrow q \in \mathbb{R}$; orthogonaux $\Leftrightarrow q \in \mathrm{i}\mathbb{R}$; triangle équilatéral direct $\Leftrightarrow q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$. Une transformation $z \mapsto az + b$ ($a \neq 0$) est une **similitude directe** : translation si $a = 1$, sinon de centre le point fixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg a$. Un **ensemble de points** défini par des modules se traite en posant $z = x + \mathrm{i}y$ ou en reconnaissant distances et médiatrices.

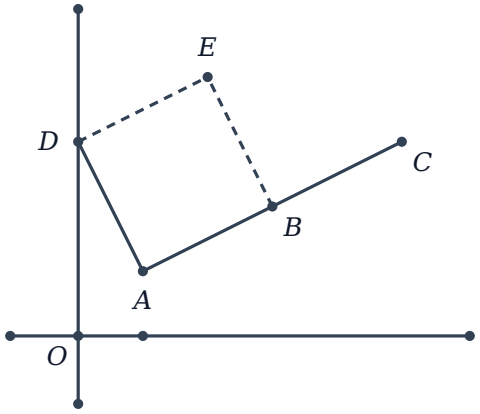
Exercice 1 – Alignement et orthogonalité

On donne $A(1 + \mathrm{i})$, $B(3 + 2\mathrm{i})$, $C(5 + 3\mathrm{i})$.

a) Montrer que A, B, C sont alignés.

b) Déterminer le point D tel que $\overrightarrow{AD}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et de même longueur, obtenu par rotation directe.

c) Quelle est la nature du quadrilatère construit sur A, B, D et $E = b + d - a$?



A, B, C alignés ; ABED est un carré.

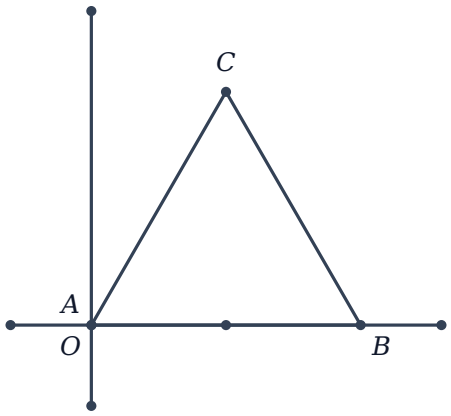
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 2 – Critère du triangle équilatéral

a) Montrer que ABC est équilatéral direct si et seulement si $c - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}(b - a)$.

b) En utilisant $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = -j^2$ et $1 + j + j^2 = 0$, montrer que cela équivaut à $a + jb + j^2 c = 0$.

c) Vérifier avec $A(0)$, $B(2)$, $C(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$. Quel est l'orientation de A, C, B ?



Le triangle équilatéral direct ABC.

Exercice 3 – Similitude directe

Soit $f : z \mapsto (1 + \mathrm{i})z + 1$.

a) Déterminer le point fixe Ω de f.

b) Écrire f sous la forme $z' - \omega = a(z - \omega)$ et donner son rapport et son angle.

c) Déterminer l'image par f du triangle O, 1, i. Vérifier que les longueurs sont multipliées par $\sqrt{2}$.

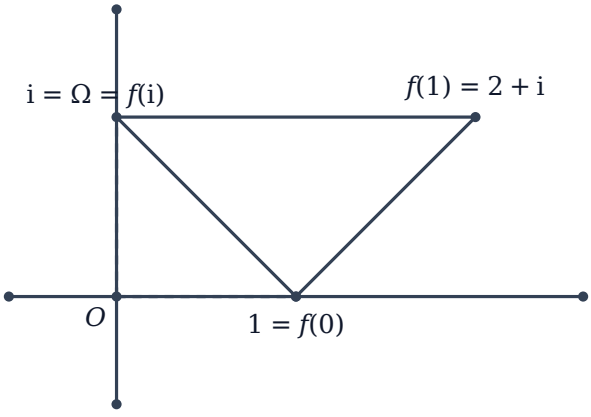


Image du triangle de sommets 0, 1, i.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

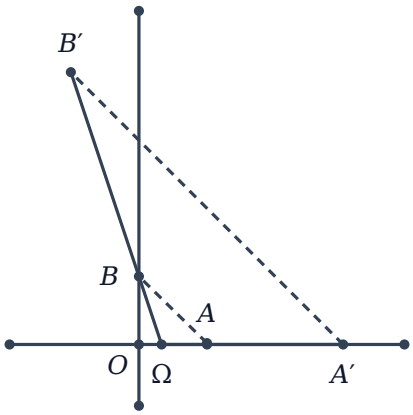
Exercice 4 – Retrouver une homothétie

On donne $A(1)$, $B(\mathrm{i})$, $A'(3)$, $B'(-1+4\mathrm{i})$.

a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe f telle que $f(A)=A'$ et $f(B)=B'$; l'écrire $z \mapsto az+b$.

b) Montrer que c'est une homothétie ; préciser son centre et son rapport.

c) Vérifier que Ω, A, A' sont alignés.



L'homothétie de centre $\Omega\left(\frac{1}{3}\right)$ et de rapport 4.

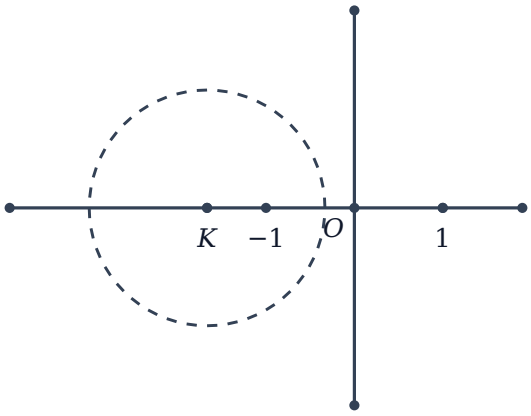
Exercice 5 – Cercle d'Apollonius

Déterminer l'ensemble Γ des points $M(z)$ tels que $|z-1|=2|z+1|$.

a) Poser $z=x+\mathrm{i}y$ et obtenir une équation cartésienne.

b) Reconnaître un cercle ; donner son centre et son rayon.

c) Vérifier que les points $\left(-\frac{1}{3},0\right)$ et $(-3,0)$ appartiennent à Γ et interpréter.



Les points dont la distance à 1 est double de la distance à -1.

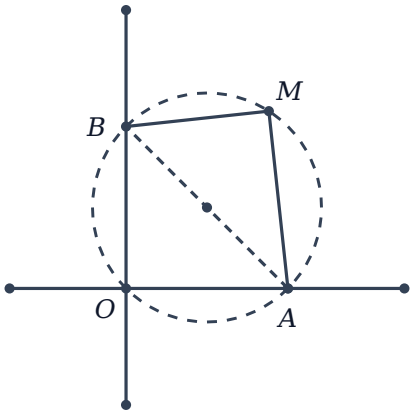
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Angle droit et cercle

Soient $A(1)$ et $B(\mathrm{i})$. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$, $z \notin \{1, \mathrm{i}\}$, tels que $\dfrac{z-\mathrm{i}}{z-1}$ soit imaginaire pur.

a) Interpréter la condition en termes d'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

b) En déduire l'ensemble cherché, puis le retrouver par le calcul en posant $z = x + \mathrm{i}y$.



Le cercle de diamètre $[AB]$: $A\hat{M}B$ est droit.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

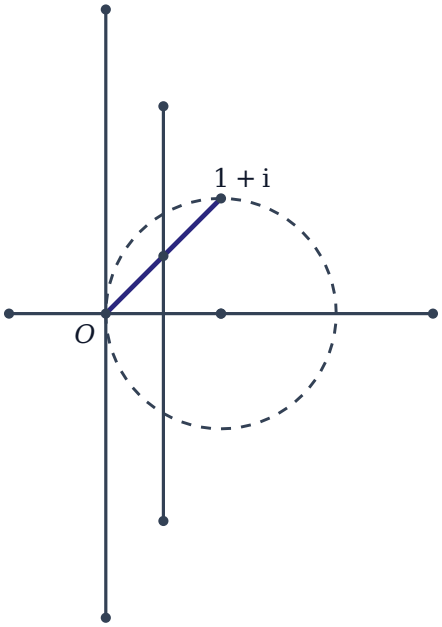
Exercice 7 – Une inversion

Soit $\varphi : z \mapsto \dfrac{1}{\overline{z}}$ sur $\mathbb{C}^*$.

a) Montrer que $\varphi(z)$ a le même argument que z et pour module $\dfrac{1}{|z|}$. Que fait φ du cercle unité ?

b) Soit C le cercle de centre 1 et de rayon 1, privé de O. Montrer que $\varphi(C)$ est la droite d'équation $\operatorname{Re} w = \dfrac{1}{2}$.

c) Vérifier avec le point $1 + \mathrm{i} \in C$.



Le cercle de centre 1 passant par O et son image, la droite $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}$ *;* $1 + \mathrm{i}$ *a pour image* $\frac{1+\mathrm{i}}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

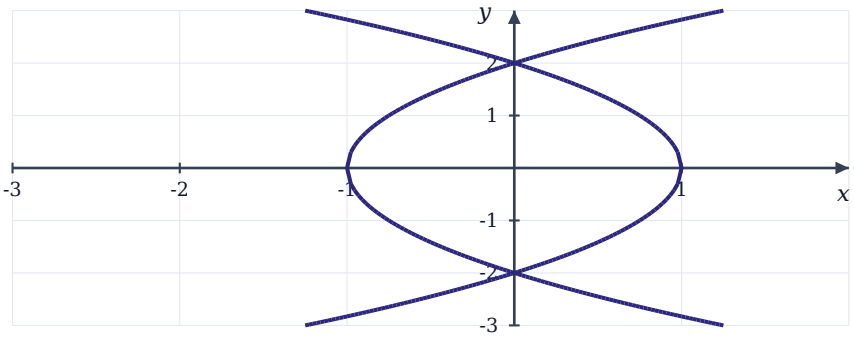
Exercice 8 – Image d’une droite par $z \mapsto z^2$

On considère $g : z \mapsto z^2$ et la droite D d’équation $\operatorname{Re} z = 1$.

a) Paramétrer D par $z = 1 + \mathrm{i}t$, $t \in \mathbb{R}$, et calculer $g(z) = X + \mathrm{i}Y$.

b) Éliminer t et reconnaître la courbe $g(D)$.

c) Quelle est l’image de la droite $\operatorname{Im} z = 1$? Où les deux courbes images se coupent-elles ?



Images de Re z = 1 (épaisse, X = 1 − Y²/4) et de Im z = 1 (X = Y²/4 − 1)

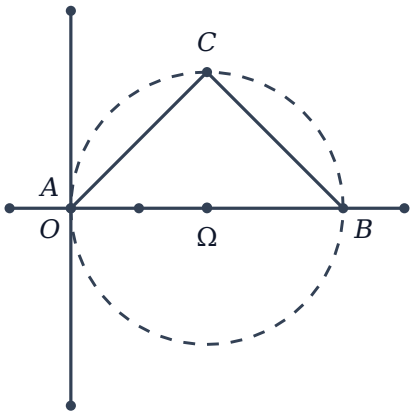
Exercice 9 – Cercle circonscrit

Soient $A(0)$, $B(4)$, $C(2 + 2\mathrm{i})$.

a) Déterminer le centre Ω et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC en résolvant $|z| = |z - 4| = |z - 2 - 2\mathrm{i}|$.

b) Calculer $\dfrac{a - c}{b - c}$ et en déduire la nature du triangle.

c) Retrouver ainsi le résultat de a).



Le cercle circonscrit à ABC.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

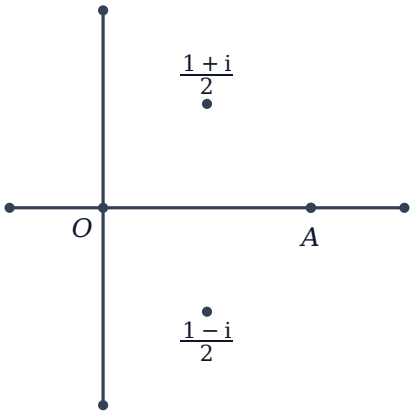
Exercice 10 – Composer deux rotations

Soit r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et r_2 la rotation de centre $A(1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Écrire les expressions complexes de r_1 et r_2.

b) Calculer $r_2 \circ r_1$ et reconnaître cette transformation.

c) Même question pour $r_1 \circ r_2$. Les deux composées sont-elles égales ?



Les centres des deux symétries centrales obtenues.

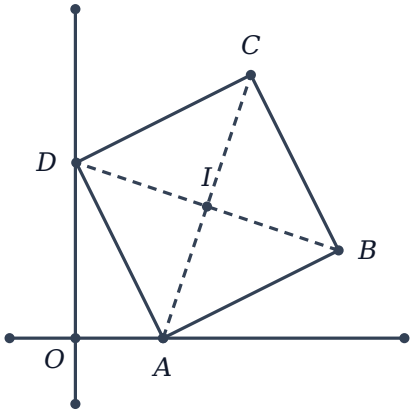
Exercice 11 – Construire un carré

On donne $A(1)$ et $B(3+\mathrm{i})$. On veut construire le carré direct $ABCD$ (sommets dans le sens trigonométrique).

a) Justifier que $c-b=\mathrm{i}(b-a)$ et $d-a=\mathrm{i}(b-a)$; calculer c et d.

b) Calculer l'affixe du centre I du carré et vérifier que $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont orthogonaux et de même longueur.

c) Calculer l'aire du carré.



Le carré direct ABCD et son centre I.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

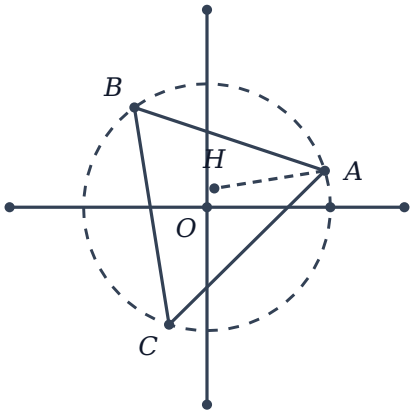
Exercice 12 – Orthocentre d'un triangle inscrit

Soient A, B, C trois points distincts du cercle unité, d'affixes a, b, c, et H le point d'affixe $h = a + b + c$.

a) Montrer que $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur (utiliser $\overline{b} = \dfrac{1}{b}$, $\overline{c} = \dfrac{1}{c}$).

b) En déduire que $(AH) \perp (BC)$, puis que H est l'orthocentre du triangle.

c) Application : $a = 1$, $b = \mathrm{i}$, $c = -1$. Donner H et interpréter.



$h = a + b + c$: l'orthocentre d'un triangle inscrit dans le cercle unité.

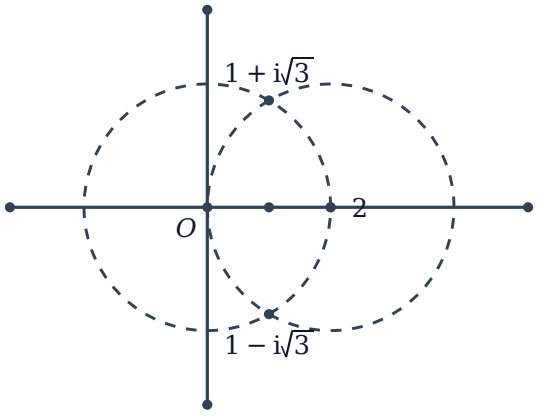
Exercice 13 – Intersection de deux cercles

Déterminer les points d'intersection des cercles $C_1 : |z| = 2$ et $C_2 : |z - 2| = 2$.

a) Montrer qu'un point commun vérifie $\mathrm{Re}\, z = 1$.

b) En déduire les affixes des points d'intersection.

c) Quelle est la nature du triangle formé par O, 2 et l'un de ces points ?



Les deux cercles de rayon 2 centrés en 0 et 2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

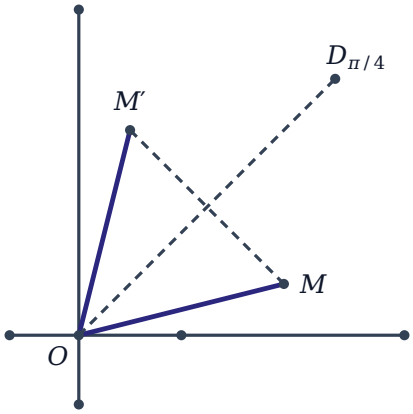
Exercice 14 – Réflexions et rotations

Soit $s_\theta : z \mapsto e^{2i\theta}\overline{z}$.

a) Montrer que s_θ fixe les points de la droite D_θ passant par O et d'angle polaire θ, et que c'est la réflexion d'axe D_θ.

b) Écrire la réflexion d'axe la première bissectrice et vérifier qu'elle échange partie réelle et partie imaginaire.

c) Calculer $s_\beta \circ s_\alpha$ et reconnaître une rotation dont on donnera l'angle.



Réflexion d'axe la première bissectrice : $2 + \frac{i}{2} \mapsto \frac{1}{2} + 2i$.

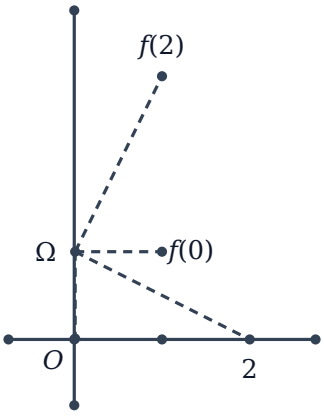
Exercice 15 – Synthèse : une similitude et ses itérées

a) Déterminer la similitude directe f telle que $f(0) = 1 + i$ et $f(2) = 1 + 3i$; l'écrire $z \mapsto az + b$.

b) Préciser sa nature (centre, rapport, angle).

c) Calculer $f \circ f$, puis $f^{\circ 4}$. Interpréter.

d) Déterminer l'image par f du cercle unité et du carré de sommets 0, 1, $1 + i$, i.



La rotation de centre $\Omega(i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).