Plaquette 1 – Module, argument, exponentielle complexe et racines de l'unité

Nombres complexes — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

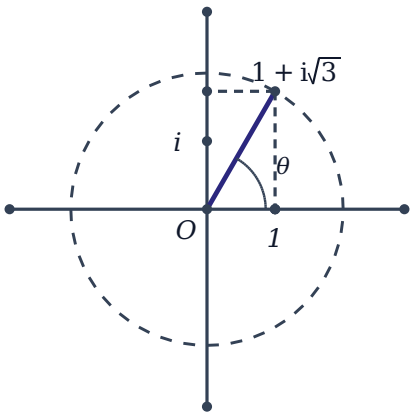
On passe de la forme algébrique à la forme exponentielle, on utilise **Moivre** et **Euler** pour linéariser, on résout des équations dans $\mathbb{C}$ et on exploite les **racines n-ièmes de l'unité**.

Exercice 1 – Forme algébrique

Écrire sous forme algébrique : $z = \dfrac{2+3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.

Exercice 2 – Forme exponentielle

Mettre sous forme exponentielle : $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.



Le point d'affixe $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ sur le cercle de rayon 2.

Exercice 3 – Puissance par Moivre

Calculer $(1+\mathrm{i})^{10}$.

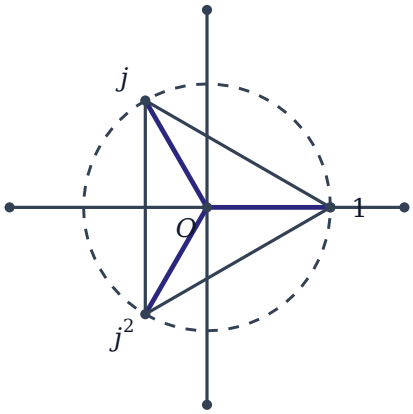
Exercice 4 – Équation du second degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 2z + 5 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Racines cubiques de l'unité

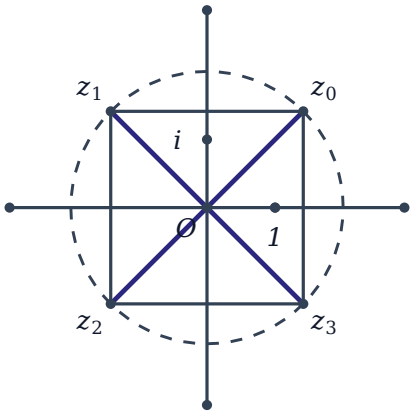
Résoudre $z^3 = 1$ dans $\mathbb{C}$, puis calculer $1 + j + j^2$ où $j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$.



Les racines cubiques de l'unité : un triangle équilatéral inscrit.

Exercice 6 – Racines n-ièmes

Résoudre $z^4 = -16$ dans $\mathbb{C}$.



Les quatre solutions de $z^4 = -16$ forment un carré.

Exercice 7 – Linéarisation

Linéariser $\cos^3\theta$ à l'aide des formules d'Euler.

Exercice 8 – Formule de Moivre et polynômes de Tchebychev

Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.

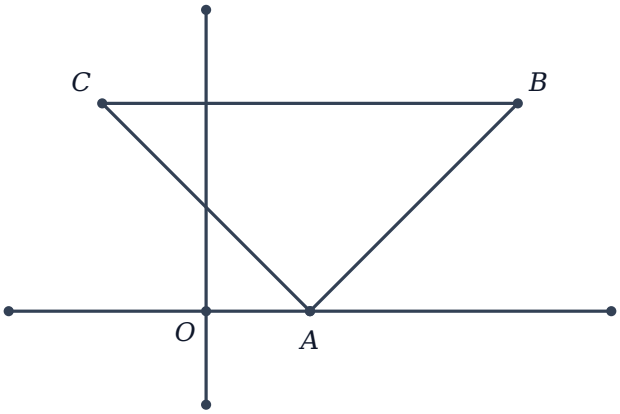
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Somme géométrique complexe

Calculer $S = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$ pour $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, puis en déduire $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\theta)$.

Exercice 10 – Interprétation géométrique

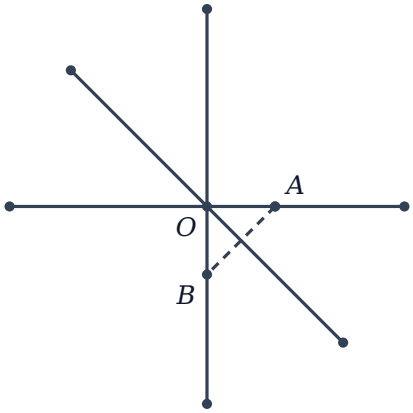
Soient A, B, C d'affixes $a = 1$, $b = 3 + 2\mathrm{i}$, $c = -1 + 2\mathrm{i}$. Déterminer la nature du triangle ABC.



Le triangle ABC.

Exercice 11 – Ensemble de points

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 1| = |z + \mathrm{i}|$.



Les points $A(1)$ et $B(-\mathrm{i})$ et la droite cherchée.

Exercice 12 – Racine carrée sous forme algébrique

a) Déterminer les racines carrées de $3 + 4\mathrm{i}$ sous forme algébrique.

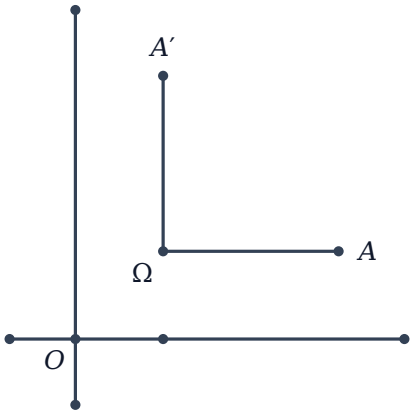
b) En déduire les solutions de $z^2 + z - \frac{1}{2} - \mathrm{i} = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Rotation

a) Soit Ω d'affixe $\omega = 1 + \mathrm{i}$. Déterminer l'image A' du point $A(3 + \mathrm{i})$ par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) Réciproquement, montrer que $z \mapsto \mathrm{i}z + 2$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

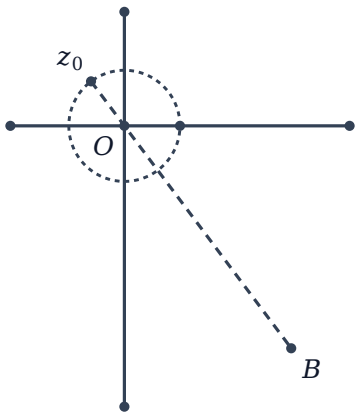


Rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$: $\Omega A = \Omega A'$ et $(\Omega A, \Omega A')$ droit.

Exercice 14 – Inégalité triangulaire

a) Montrer que $|z + w| \leq |z| + |w|$ pour tous complexes z, w (développer $|z + w|^2$ et utiliser $\mathrm{Re}(u) \leq |u|$). Préciser le cas d'égalité.

b) Pour $|z| \leq 1$, déterminer le maximum de $|z - 3 + 4\mathrm{i}|$ et le point où il est atteint.



B d'affixe $3 - 4\mathrm{i}$ et le point z_0 du disque unité le plus éloigné de B.

Exercice 15 – Synthèse : équation de degré 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$, sachant que 1 est racine.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).