Plaquette 5 – Arithmétique des polynômes et interpolation de Lagrange

Polynômes — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Arithmétique dans $\mathrm{K}[X]$**.**

— **PGCD** : $A \wedge B$ est le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide, rendu unitaire. Sur $\mathbb{C}$: racines communes, avec la plus petite multiplicité.

— **Bézout** : il existe U, V tels que $AU + BV = A \wedge B$; A et B sont **premiers entre eux** si et seulement si

$$\exists\, U, V \in \mathrm{K}[X], \qquad AU + BV = 1$$

— **Gauss** : si $A \mid BC$ et $A \wedge B = 1$, alors $A \mid C$. Si $A \wedge B = 1$, $A \mid C$ et $B \mid C$, alors $AB \mid C$.

— **PPCM** : pour A, B unitaires, $(A \wedge B)(A \vee B) = AB$.

— **Irréductibles** : sur $\mathbb{C}$, les degrés 1 ; sur $\mathbb{R}$, les degrés 1 et les degrés 2 de discriminant < 0 ; sur $\mathbb{Q}$, un polynôme de degré 2 ou 3 est irréductible si et seulement s'il n'a pas de racine rationnelle.

Interpolation de Lagrange. Pour $x_0, \ldots, x_n$ distincts, les polynômes

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

— vérifient $L_i(x_k) = \delta_{ik}$; l'unique P de degré $\leq n$ tel que $P(x_i) = y_i$ est $P = \sum_i y_i L_i$.

Correction de l'exercice 1 – PGCD par l'algorithme d'Euclide

a) Première division : le quotient commence par X, puis -1.

— $XB = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X$, et $A - XB = -X^3 + 1$; puis $-X^3 + 1 + B = 2X^2 + 2X + 2$. Donc

$$A = B(X - 1) + 2(X^2 + X + 1)$$

— Deuxième division : $B = (X^2 + X + 1)(X + 1)$ exactement (reste nul). Le dernier reste non nul est $2(X^2 + X + 1)$; rendu unitaire : $A \wedge B = X^2 + X + 1$.

b) $B(-1) = -1 + 2 - 2 + 1 = 0$, et $B = (X + 1)(X^2 + X + 1)$. Pour A : $A = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$, car $(X^2 + 1)(X^2 + X + 1) = X^4 + X^3 + X^2 + X^2 + X + 1$ ✓. Les facteurs $X^2 + 1$ et $X + 1$ n'ont pas de racine commune : le PGCD est bien $X^2 + X + 1$.

c) Les racines communes sont celles du PGCD : j et $j^2 = \bar{j}$.

Méthode : on peut, à chaque étape, multiplier un reste par une constante non nulle (ici diviser par 2) sans changer le PGCD.

Réponse. $A \wedge B = X^2 + X + 1$; $A = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$, $B = (X + 1)(X^2 + X + 1)$; racines communes j, j^2.

Correction de l'exercice 2 – Une relation de Bézout

a) Leurs racines sont 1 et -1 : aucune racine commune dans $\mathbb{C}$, donc PGCD égal à 1.

b) On pose $U = aX + b$ et $V = -aX + b$. On veut

$$(X - 1)^2(aX + b) + (X + 1)^2(-aX + b) = 1$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $(X^2-2X+1)(aX+b)$ a pour coefficients, de X^3 à la constante : a, $b-2a$, $a-2b$, b.
— $(X^2+2X+1)(-aX+b)$ a pour coefficients : $-a$, $b-2a$, $2b-a$, b.
— Somme : X^3 et X disparaissent ; il reste $2(b-2a)=0$ pour X^2 et $2b=1$ pour la constante.
— Donc $b=\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{4}$: $U=\frac{X+2}{4}$, $V=\frac{2-X}{4}$.

c) $(X-1)^2(X+2)=X^3-3X+2$ et $(X+1)^2(2-X)=-X^3+3X+2$; la somme vaut 4, et divisée par 4 donne 1 ✓.

d) On divise la relation par $(X-1)^2(X+1)^2$:

— $\frac{1}{(X-1)^2(X+1)^2}=\frac{X+2}{4(X+1)^2}+\frac{2-X}{4(X-1)^2}$: c'est un premier pas vers la décomposition en éléments simples.

Réponse. $U=\frac{X+2}{4}$, $V=\frac{2-X}{4}$; $\frac{1}{(X-1)^2(X+1)^2}=\frac{X+2}{4(X+1)^2}+\frac{2-X}{4(X-1)^2}$.

Correction de l'exercice 3 – Bézout et conditions aux racines doubles

a) $P_0+1=2(X-1)^2U$ est multiple de $(X-1)^2$. Et, avec $(X-1)^2U+(X+1)^2V=1$:

$$P_0-1=2(X-1)^2U-2=-2(X+1)^2V$$

— est multiple de $(X+1)^2$. Développement :
$P_0=-1+\frac{(X-1)^2(X+2)}{2}=-1+\frac{X^3-3X+2}{2}=\frac{X^3-3X}{2}$.

b) $(X-1)^2 \mid P+1 \Leftrightarrow P(1)=-1$ et $P'(1)=0$; $(X+1)^2 \mid P-1 \Leftrightarrow P(-1)=1$ et $P'(-1)=0$.

— $P_0(1)=\frac{1-3}{2}=-1$, $P_0(-1)=\frac{-1+3}{2}=1$, $P_0'=\frac{3X^2-3}{2}$ s'annule en ±1 ✓.

c) Si P convient, $D=P-P_0$ est divisible par $(X-1)^2$ et par $(X+1)^2$, premiers entre eux : par Gauss, par leur produit. Réciproquement, ajouter un multiple de ce produit conserve les deux divisibilités.

d) P_0 a un **maximum local** 1 en -1 et un **minimum local** -1 en 1, avec des tangentes horizontales. On reconnaît $P_0=T_3\left(\frac{X}{2}\right)$, où $T_3=4X^3-3X$ est le polynôme de Tchebychev : $4\frac{X^3}{8}-3\frac{X}{2}=\frac{X^3-3X}{2}$ ✓.

Réponse. $P_0=\frac{X^3-3X}{2}$; solutions $P_0+(X-1)^2(X+1)^2T$.

Correction de l'exercice 4 – PGCD de X^m-1 et X^n-1

a) Posons $n_0=n$, $n_1=m$ et la suite des restes $n_{k+1}=n_{k-1} \bmod n_k$ jusqu'à $n_{p+1}=0$, de sorte que $n_p=m\wedge n$. Par le rappel, les restes polynomiaux successifs sont les $X^{n_k}-1$:

$$(X^{n_{k-1}}-1)\wedge(X^{n_k}-1)=(X^{n_k}-1)\wedge(X^{n_{k+1}}-1)$$

— et la dernière étape donne $(X^{n_p}-1)\wedge(X^0-1)=(X^{n_p}-1)\wedge 0=X^{n_p}-1$.

b) Les racines de X^m-1 et X^n-1 sont simples. z est racine commune si et seulement si $z^m=z^n=1$, c'est-à-dire si l'ordre de z dans $\mathbb{C}^*$ divise m et n, donc $m\wedge n$: $z^{m\wedge n}=1$. Le PGCD est le produit des $X-z$ pour ces z, soit $X^{m\wedge n}-1$.

c) $12\wedge 18=6$: $(X^{12}-1)\wedge(X^{18}-1)=X^6-1$.

— $12\wedge 35=1$: $(X^{12}-1)\wedge(X^{35}-1)=X-1$; la seule racine commune est 1.

Réponse. $(X^m-1)\wedge(X^n-1)=X^{m\wedge n}-1$; X^6-1 et $X-1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – PGCD par les racines

Sur $\mathbb{C}$, le PGCD de deux polynômes scindés garde les racines communes avec la **plus petite** multiplicité :

$$A = \prod (X-z)^{\alpha_z},\ B = \prod (X-z)^{\beta_z} \Rightarrow A \wedge B = \prod (X-z)^{\min(\alpha_z,\beta_z)}$$

a) 1 est racine d'ordre 3 de P, donc d'ordre 2 de P' ; -2 d'ordre 2 de P, donc d'ordre 1 de P'. Les autres racines de P' ne sont pas racines de P. Donc $P \wedge P' = (X-1)^2(X+2)$.

— Vérification : $P' = 3(X-1)^2(X+2)^2 + 2(X-1)^3(X+2) = (X-1)^2(X+2)(5X+4)$, et $5X+4$ ne s'annule ni en 1 ni en -2 ✓.

b) Racines de X^4-1 : $\pm 1, \pm i$; racines de X^6-1 : $\pm 1, \pm j, \pm j^2$. Communes : ± 1. Donc le PGCD est $X^2-1 = X^{4\wedge 6}-1$ ✓.

c) $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ et $X^3+X^2 = X^2(X+1)$: PGCD $X(X+1)$ (exposants minimaux 1 et 1), PPCM $X^2(X-1)(X+1)$ (exposants maximaux).

— Contrôle : PGCD × PPCM $= X^3(X-1)(X+1)^2 = (X^3-X)(X^3+X^2)$ ✓.

Réponse. $P \wedge P' = (X-1)^2(X+2)$; X^2-1 ; PGCD $X(X+1)$, PPCM $X^2(X^2-1)$.

Correction de l'exercice 6 – Irréductibles selon le corps

a) Dans $\mathbb{R}[X]$: $X^2-2 = (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$, **réductible**. Dans $\mathbb{Q}[X]$: un facteur de degré 1 donnerait une racine rationnelle, or $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: **irréductible**.

b) On complète le carré :

$$X^4+4 = (X^2+2)^2 - 4X^2 = (X^2+2-2X)(X^2+2+2X)$$

— deux facteurs de $\mathbb{Q}[X]$: X^4+4 est **réductible** sur $\mathbb{Q}$, bien qu'il n'ait aucune racine réelle. Absence de racine et irréductibilité ne coïncident qu'en degré 2 ou 3.

c) Degré 3 : réductible sur $\mathbb{Q}$ si et seulement s'il a une racine rationnelle ; les candidats $\pm 1, \pm 2$ ne conviennent pas. Irréductible. Dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$, avec $\alpha = \sqrt[3]{2}$:

— $X^3-2 = (X-\alpha)(X^2+\alpha X+\alpha^2) = (X-\alpha)(X-\alpha j)(X-\alpha j^2)$.

d) X^2+1 : degré 2 de discriminant $-4<0$, irréductible sur $\mathbb{R}$.
$X^4+1 = (X^2+1)^2 - 2X^2 = (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$: réductible sur $\mathbb{R}$ (comme tout polynôme réel de degré ≥ 3).

Réponse. a) irréductible sur $\mathbb{Q}$, pas sur $\mathbb{R}$ · b) réductible sur $\mathbb{Q}$ · c) irréductible sur $\mathbb{Q}$; $(X-\alpha)(X^2+\alpha X+\alpha^2)$ · d) X^4+1 réductible sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 7 – Propriétés de la base de Lagrange

Le principe : deux polynômes de degré $\leq n$ égaux en $n+1$ points sont égaux.

a) $S = \sum L_i$ est de degré $\leq n$ et $S(x_k) = \sum_i L_i(x_k) = L_k(x_k) = 1$ pour tout k : S et 1 coïncident en $n+1$ points, donc $S = 1$.

b) Même raisonnement : $\sum_i x_i^k L_i$ et X^k sont de degré $\leq n$ (car $k \leq n$) et prennent la valeur x_m^k en chaque x_m. Pour $k = n+1$, la somme reste de degré $\leq n$:

$$\sum_i x_i^{n+1} L_i = X^{n+1} - \prod_{i=0}^{n} (X - x_i)$$

— car le membre de droite est de degré $\leq n$ (les X^{n+1} se simplifient) et vaut x_m^{n+1} en chaque x_m.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum P(x_i)L_i$ (même argument) : la famille est génératrice, avec $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ éléments, donc une base. Les coordonnées de P sont $(P(x_0), \dots, P(x_n))$.

d) $L_0 = \frac{X(X-1)}{(-1)(-2)} = \frac{X^2-X}{2}$, $L_1 = \frac{(X+1)(X-1)}{(1)(-1)} = 1 - X^2$, $L_2 = \frac{(X+1)X}{2} = \frac{X^2+X}{2}$.

— Somme : $\frac{X^2-X+X^2+X}{2} + 1 - X^2 = 1$ ✓.

Réponse. $\sum L_i = 1$, $\sum x_i^k L_i = X^k$ ($k \le n$) ; base de coordonnées $P(x_i)$; $L_0 = \frac{X^2-X}{2}$, $L_1 = 1 - X^2$, $L_2 = \frac{X^2+X}{2}$.

Correction de l'exercice 8 – Somme des carrés par interpolation

a) $S(0) = 0$, $S(1) = 1$, $S(2) = 5$, $S(3) = 14$.

b) $P(0) = 0$ justifie la forme $P = X(aX^2 + bX + c)$. Les trois autres conditions :

— $a + b + c = 1$; $2(4a + 2b + c) = 5$; $3(9a + 3b + c) = 14$.

— Par différences : $3a + b = \frac{3}{2}$ et $5a + b = \frac{14}{3} - \frac{5}{2} = \frac{13}{6}$, d'où $2a = \frac{2}{3}$, $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$.

$$P = \frac{X(2X^2+3X+1)}{6} = \frac{X(X+1)(2X+1)}{6}$$

c) $P(X) - P(X-1) = \frac{X}{6}[(X+1)(2X+1) - (X-1)(2X-1)] = \frac{X}{6} \times 6X = X^2$.

— Récurrence : $P(0) = S(0)$, et si $P(n-1) = S(n-1)$, alors $P(n) = P(n-1) + n^2 = S(n)$.

d) Quatre valeurs déterminent **un** polynôme de degré ≤ 3, mais rien ne garantit a priori que S coïncide avec un polynôme au-delà de ces points. C'est c) qui le prouve : S et P vérifient la même relation de récurrence.

— Contrôle : $S(10) = 385$ et $P(10) = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$ ✓.

Réponse. $P = \frac{X(X+1)(2X+1)}{6}$; $P(X) - P(X-1) = X^2$ donne $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Correction de l'exercice 9 – Coefficient dominant de l'interpolation

a) $L_i = \frac{\prod_{j \neq i}(X - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$ est de degré n, de coefficient dominant $\frac{1}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$. Par linéarité, le coefficient de X^n dans $\sum y_i L_i$ est la somme annoncée.

b) On prend $y_i = x_i^k$: le polynôme interpolateur est X^k lui-même (degré $\le n$, mêmes valeurs). Son coefficient de X^n vaut 0 si $k < n$ et 1 si $k = n$; on conclut par a).

c) Les dénominateurs valent $\prod_{j \neq 0}(0 - x_j) = (-1)(-2) = 2$, $\prod_{j \neq 1}(1 - x_j) = 1 \times (-1) = -1$, $\prod_{j \neq 2}(2 - x_j) = 2 \times 1 = 2$.

— $k = 0$: $\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$ ✓.

— $k = 1$: $\frac{0}{2} + \frac{1}{-1} + \frac{2}{2} = 0$ ✓.

— $k = 2$: $0 - 1 + \frac{4}{2} = 1$ ✓.

Lecture : ce sont les **différences divisées** d'ordre n ; elles annulent les polynômes de degré $< n$, comme une dérivée n-ième.

Réponse. Coefficient dominant $\sum \frac{y_i}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$; la somme vaut 0 pour $k < n$ et 1 pour $k = n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Restes chinois pour les polynômes

a) X^2+1 n'a pas de racine réelle, en particulier pas 1 : pas de racine commune, PGCD 1. Division : $X^2+1=(X-1)(X+1)+2$, d'où

$$\frac{1}{2}(X^2+1)-\frac{1}{2}(X+1)(X-1)=1$$

b) On écrit $P_0=aX^2+bX+c$. Modulo X^2+1 : $P_0\equiv bX+(c-a)$, qui doit valoir X : $b=1$ et $c=a$. En 1 : $P_0(1)=a+1+a=2$, d'où $a=\frac{1}{2}$.

— $P_0=\frac{1}{2}X^2+X+\frac{1}{2}=\frac{(X+1)^2}{2}$. Contrôle : $P_0(1)=2$ ✓ et $P_0-X=\frac{X^2+1}{2}$ ✓.

c) Si P convient, $P-P_0$ est divisible par $X-1$ et par X^2+1, premiers entre eux, donc par leur produit :

— les solutions sont les $P_0+(X-1)(X^2+1)T$, $T\in\mathbb{R}[X]$.

d) Comme dans $\mathbb{Z}$, deux « modules » premiers entre eux déterminent une classe modulo leur produit : $\mathbb{R}[X]$ modulo $(X-1)(X^2+1)$ se décompose en « modulo $X-1$ » (une valeur réelle) et « modulo X^2+1 » (une valeur en i). Comme dans $\mathbb{Z}$, la relation de Bézout de a) fournit une solution directe : $2\times\frac{X^2+1}{2}+X\times\left(-\frac{(X+1)(X-1)}{2}\right)=X^2+1-\frac{X^3-X}{2}$, qui vaut 2 en 1 et $\equiv X$ modulo X^2+1 ; c'est $P_0-\frac{1}{2}(X-1)(X^2+1)$.

Réponse. Bézout $\frac{1}{2}(X^2+1)-\frac{1}{2}(X+1)(X-1)=1$; $P_0=\frac{(X+1)^2}{2}$; solutions $P_0+(X-1)(X^2+1)T$.

Correction de l'exercice 11 – PGCD, PPCM et produit

a) Si E divise A_1 et B_1, alors DE divise A et B, donc D : $\deg E=0$. Ainsi $A_1\wedge B_1=1$.

— $M=AB_1=BA_1$ est un multiple commun. Si C est un multiple commun, $C=AU=DA_1U$ et $B=DB_1\mid C$ donnent $B_1\mid A_1U$, puis $B_1\mid U$ par Gauss : $M=DA_1B_1\mid DA_1U=C$.

b) $DM=D\cdot DA_1B_1=(DA_1)(DB_1)=AB$:

$$(A\wedge B)(A\vee B)=AB$$

c) $X^2-1=(X-1)(X+1)$ et $X^2+X=X(X+1)$ ont pour PGCD $X+1$; le PPCM vaut $\frac{(X^2-1)(X^2+X)}{X+1}=X(X-1)(X+1)=X^3-X$.

d) Le PGCD est X^2-1 (exercice 5). Le PPCM vaut

— $\frac{(X^4-1)(X^6-1)}{X^2-1}=(X^2+1)(X^6-1)=X^8+X^6-X^2-1$.

— Contrôle par les racines : le PPCM a pour racines simples les racines de X^4-1 ou de X^6-1, soit $4+6-2=8$ racines : degré 8 ✓.

Réponse. $(A\wedge B)(A\vee B)=AB$; $\mathrm{ppcm}(X^2-1,X^2+X)=X^3-X$; $\mathrm{ppcm}(X^4-1,X^6-1)=X^8+X^6-X^2-1$.

Correction de l'exercice 12 – Partie sans facteur carré

a) $(X^2-1)^2=X^4-2X^2+1$, et $(X-1)(X^4-2X^2+1)=X^5-X^4-2X^3+2X^2+X-1$ ✓. Or $(X-1)(X^2-1)^2=(X-1)^3(X+1)^2$.

b) On dérive le produit et on factorise :

$$P'=3(X-1)^2(X+1)^2+2(X-1)^3(X+1)=(X-1)^2(X+1)(5X+1)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $-\frac{1}{5}$ n'est pas racine de P, donc $P \wedge P' = (X-1)^2(X+1)$.

c) $\frac{P}{P \wedge P'} = (X-1)(X+1) = X^2 - 1$, de racines ± 1, **simples**.

d) Si $P = c\prod (X - z_k)^{m_k}$, chaque z_k est racine de P' d'ordre exactement $m_k - 1$: $P \wedge P' = \prod (X - z_k)^{m_k - 1}$ (à un facteur près), donc

— $\frac{P}{P \wedge P'} = c\prod (X - z_k)$: mêmes racines, toutes simples. Ce calcul, qui n'utilise qu'Euclide, permet de trouver les racines multiples **sans** connaître les racines.

Réponse. $P' = (X-1)^2(X+1)(5X+1)$; $P \wedge P' = (X-1)^2(X+1)$; $\frac{P}{P \wedge P'} = X^2 - 1$.

Correction de l'exercice 13 – Résoudre AU + BV = C

a) On multiplie la relation de Bézout par X^3 :

$$(X^2+1)\frac{X^3}{2} + (X+1)\left(-\frac{X^3(X-1)}{2}\right) = X^3$$

— d'où $U_0 = \frac{X^3}{2}$ et $V_0 = -\frac{X^3(X-1)}{2}$.

b) Si (U, V) est solution, la différence avec (U_0, V_0) vérifie $(X^2+1)(U - U_0) = -(X+1)(V - V_0)$. $X+1$ divise $(X^2+1)(U-U_0)$ et est premier avec X^2+1 : par Gauss, $U - U_0 = (X+1)T$, puis $V - V_0 = -(X^2+1)T$. La réciproque se vérifie en développant.

c) On choisit T pour que $U = U_0 + (X+1)T$ soit le **reste** de U_0 par $X+1$, c'est-à-dire $U_0(-1) = -\frac{1}{2}$. Alors

— $V = \frac{X^3 - (X^2+1)U}{X+1} = \frac{2X^3 + X^2 + 1}{2(X+1)} = \frac{2X^2 - X + 1}{2}$, car $(X+1)(2X^2 - X + 1) = 2X^3 + X^2 + 1$.

— Contrôle : $(X^2+1)\left(-\frac{1}{2}\right) + (X+1)\frac{2X^2 - X + 1}{2} = \frac{-X^2 - 1 + 2X^3 + X^2 + 1}{2} = X^3$ ✓.

Réponse. Solutions $\left(\frac{X^3}{2} + (X+1)T,\ -\frac{X^3(X-1)}{2} - (X^2+1)T\right)$; avec U constant : $U = -\frac{1}{2}$, $V = \frac{2X^2 - X + 1}{2}$.

Correction de l'exercice 14 – Polynômes à valeurs entières

a) Si $0 \le n < k$, le produit contient le facteur $n - n = 0$: $H_k(n) = 0$. Si $n < 0$, avec $m = -n > 0$:

$$H_k(-m) = \frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-k+1)}{k!} = (-1)^k\binom{m+k-1}{k} \in \mathbb{Z}$$

b) H_k est de degré exactement k : une famille de polynômes de degrés échelonnés $0, 1, \ldots, n$ est libre, et elle a $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ éléments.

c) On écrit $P = c_0 + c_1H_1 + c_2H_2 + c_3H_3$ et on évalue successivement (système triangulaire, car $H_k(j) = 0$ pour $j < k$) :

— $P(0) = c_0 = 1$; $P(1) = 1 + c_1 = 2$, $c_1 = 1$; $P(2) = 1 + 2 + c_2 = 4$, $c_2 = 1$; $P(3) = 1 + 3 + 3 + c_3 = 8$, $c_3 = 1$.

— $P = 1 + H_1 + H_2 + H_3$ et $P(4) = 1 + 4 + 6 + 4 = 15 \neq 16$: le polynôme qui « suit » 2^n sur quatre valeurs s'en écarte ensuite.

d) Le système de c) montre en général que les coordonnées c_k s'obtiennent par soustractions à partir des $P(j)$ (ce sont les différences finies $\Delta^k P(0)$) : elles sont **entières**. Par a), $P = \sum c_k H_k$ prend alors des valeurs entières en tout entier.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $H_k(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$; base de $\mathbb{R}_n[X]$; $P = 1 + H_1 + H_2 + H_3$, $P(4) = 15$; valeurs entières sur $\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la méthode de Simpson

a) $L_{-1} = \frac{X^2 - X}{2}$, $L_0 = 1 - X^2$, $L_1 = \frac{X^2 + X}{2}$. Les parties impaires ont une intégrale nulle sur $[-1, 1]$ et $\int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}$:

— $\int L_{\pm 1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$; $\int L_0 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Pour $\deg P \leq 2$, $P = P(-1)L_{-1} + P(0)L_0 + P(1)L_1$; on intègre par linéarité :

$$\int_{-1}^{1} P = \frac{1}{3}P(-1) + \frac{4}{3}P(0) + \frac{1}{3}P(1)$$

b) Pour X^3 : l'intégrale vaut 0 (impaire) et la formule donne $\frac{-1 + 0 + 1}{3} = 0$: exacte. Par linéarité, exacte en degré ≤ 3.

— Pour X^4 : $\int_{-1}^{1} x^4 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{5}$ mais la formule donne $\frac{1 + 0 + 1}{3} = \frac{2}{3}$: **non**.

c) On pose $x = m + ht$ avec $m = \frac{a+b}{2}$, $h = \frac{b-a}{2}$; $Q(t) = P(m + ht)$ est de degré ≤ 3 et

— $\int_a^b P(x) \, \mathrm{d}x = h \int_{-1}^{1} Q(t) \, \mathrm{d}t = \frac{b-a}{2} \times \frac{Q(-1) + 4Q(0) + Q(1)}{3}$, qui est la formule annoncée.

d) Avec $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$: $f(0) = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$, $f(1) = \frac{1}{2}$.

— $\frac{1}{6}\left(1 + \frac{16}{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} \times \frac{47}{10} = \frac{47}{60} \approx 0{,}78333$, contre $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}78540$: erreur $\approx 2{,}1 \times 10^{-3}$ avec trois évaluations seulement.

Réponse. $\int_{-1}^{1} P = \frac{P(-1) + 4P(0) + P(1)}{3}$, exacte jusqu'au degré 3, pas pour X^4 ; $\frac{47}{60} \approx 0{,}7833$ pour $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).