Plaquette 1 – Division euclidienne, racines, multiplicité et factorisation

Polynômes — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Degré et division.

— $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$; $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$.

— **Division euclidienne** : pour $B \neq 0$, il existe un unique couple (Q, R) avec

$$A = BQ + R \qquad \deg R < \deg B$$

— $B \mid A$ si et seulement si le reste est nul.

Racines.

— a est racine de $P \Leftrightarrow (X-a) \mid P$. Plus généralement, $P(a)$ est le **reste** de la division de P par $X-a$.

— **Multiplicité** m : $(X-a)^m \mid P$ et $(X-a)^{m+1} \nmid P$. Caractérisation par les dérivées :

$$P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(a) \neq 0$$

— Un polynôme non nul de degré n a **au plus** n **racines** (comptées avec multiplicité). Un polynôme ayant une infinité de racines est nul.

— **Théorème de d'Alembert-Gauss** : tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est **scindé** ; il s'écrit $a\prod (X-z_i)^{m_i}$.

— Dans $\mathbb{R}[X]$: les racines complexes non réelles vont **par paires conjuguées** ; les irréductibles sont les degrés 1 et les degrés 2 de discriminant négatif.

— **Relations coefficients-racines** (degré n, racines x_i) :

$$\sum x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad \prod x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

— **Formule de Taylor pour les polynômes** : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.

Correction de l'exercice 1 – Division euclidienne

On cherche l'unique couple (Q, R) du théorème de division euclidienne :

$$A = BQ + R, \qquad \deg R < \deg B = 2$$

On procède par étapes, en éliminant à chaque fois le terme de plus haut degré.

— $X^4 : X^2 = X^2$. On soustrait $X^2 B = X^4 - X^3 + X^2$: reste $X^3 - 4X^2 + 2X - 1$.

— $X^3 : X^2 = X$. On soustrait $XB = X^3 - X^2 + X$: reste $-3X^2 + X - 1$.

— $-3X^2 : X^2 = -3$. On soustrait $-3B = -3X^2 + 3X - 3$: reste $-2X + 2$.

— Le degré 1 du reste est < 2 : on s'arrête.

— **Résultat** : $Q = X^2 + X - 3$ et $R = -2X + 2$.

— **Vérification** en $X = 1$: $A(1) = 1 - 3 + 2 - 1 = -1$; $B(1) = 1$, $Q(1) = -1$, $R(1) = 0$, donc $BQ + R = -1$. Cohérent.

— **Deuxième contrôle** en $X = 0$: $A(0) = -1$; $B(0)Q(0) + R(0) = 1 \times (-3) + 2 = -1$. Cohérent.

Réponse. $Q = X^2 + X - 3$, $R = -2X + 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Reste sans division

Par $X-1$: le reste est une constante égale à $P(1)$.

— $P(1) = 1+1+1 = 3$. Le reste est 3.

Par X^2-1 : le reste est de degré ≤ 1, on l'écrit $R = aX+b$.

— $X^2-1 = (X-1)(X+1)$, donc en évaluant $P = (X^2-1)Q + aX + b$ en 1 et en -1 :
— $P(1) = a+b = 3$;
— $P(-1) = 1-1+1 = 1 = -a+b$.
— En additionnant : $2b = 4$, donc $b = 2$ et $a = 1$.
— **Reste** : $R = X+2$.
— **Méthode générale** : pour un diviseur **scindé à racines simples**, il suffit d'évaluer en chaque racine — inutile de faire la division.

Réponse. 3, puis $X+2$.

Correction de l'exercice 3 – Racine et factorisation

Recherche d'une racine rationnelle : les candidats divisent le terme constant 6.

— $P(-1) = -1-4-1+6 = 0$: -1 est racine, donc $(X+1) \mid P$.
— **Division** : $P = (X+1)(X^2-5X+6)$.
— Contrôle du développement : $X^3-5X^2+6X+X^2-5X+6 = X^3-4X^2+X+6$. Cohérent.
— **Second facteur** : X^2-5X+6 a pour racines 2 et 3 (somme 5, produit 6).
— **Factorisation** : $P = (X+1)(X-2)(X-3)$.
— **Contrôle par les relations** : somme des racines $-1+2+3 = 4 = -\frac{-4}{1}$; produit $-1\times 2\times 3 = -6 = (-1)^3 \times \frac{6}{1}$. Cohérent.

Réponse. $P = (X+1)(X-2)(X-3)$.

Correction de l'exercice 4 – Racine multiple

On utilise la caractérisation de la multiplicité par les dérivées : 1 est racine d'ordre m si et seulement si

$$P(1) = P'(1) = \ldots = P^{(m-1)}(1) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(1) \neq 0$$

On teste donc P et ses dérivées successives en 1.

— $P(1) = 1-2+2-1 = 0$.
— $P'(X) = 4X^3-6X^2+2$, donc $P'(1) = 4-6+2 = 0$.
— $P''(X) = 12X^2-12X$, donc $P''(1) = 0$.
— $P'''(X) = 24X-12$, donc $P'''(1) = 12 \neq 0$.
— La première dérivée non nulle en 1 est la **troisième** : la multiplicité est 3.
— **Factorisation** : $P = (X-1)^3(X+1)$.
— **Vérification** : $(X-1)^3 = X^3-3X^2+3X-1$, et en multipliant par $X+1$: $X^4-3X^3+3X^2-X+X^3-3X^2+3X-1 = X^4-2X^3+2X-1$. Cohérent.

Réponse. Multiplicité 3 ; $P = (X-1)^3(X+1)$.

Correction de l'exercice 5 – Factorisation dans C puis dans R

Dans $\mathbb{C}[X]$: on résout $z^4 = -1 = e^{i\pi}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Les racines sont $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi + 2k\pi)/4}$, soit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}$, $\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/4}$, $\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/4}$.

— Donc $P = \prod_{k=0}^{3} \left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)\pi/4}\right)$.

Dans $\mathbb{R}[X]$: on regroupe les racines **conjuguées** deux à deux.

— $\left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\right)\left(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\right) = X^2 - 2\cos\frac{\pi}{4}X + 1 = X^2 - \sqrt{2}X + 1$.

— De même pour $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}$: $X^2 + \sqrt{2}X + 1$.

— **Résultat** : $X^4 + 1 = \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)$.

— **Vérification** : le produit vaut $\left(X^2+1\right)^2 - 2X^2 = X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2 = X^4 + 1$. Cohérent.

— **Leçon** : $X^4 + 1$ n'a pas de racine réelle mais **n'est pas irréductible** dans $\mathbb{R}[X]$ — seuls les degrés 1 et 2 peuvent l'être.

Réponse. $\left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)$.

Correction de l'exercice 6 – Polynôme à racines imposées

On écrit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et on traduit les quatre conditions.

— $P(0) = d = 1$.

— $P(1) = a + b + c + 1 = 0$, donc $a + b + c = -1$.

— $P(2) = 8a + 4b + 2c + 1 = 1$, donc $8a + 4b + 2c = 0$, soit $4a + 2b + c = 0$.

— $P(3) = 27a + 9b + 3c + 1 = 10$, donc $27a + 9b + 3c = 9$, soit $9a + 3b + c = 3$.

— **Résolution** : en soustrayant les deux premières relations, $3a + b = 1$; en soustrayant les deux dernières, $5a + b = 3$.

— D'où $2a = 2$, $a = 1$, puis $b = 1 - 3 = -2$, puis $c = -1 - a - b = -1 - 1 + 2 = 0$.

— **Résultat** : $P = X^3 - 2X^2 + 1$.

— **Vérification** : $P(1) = 1 - 2 + 1 = 0$; $P(2) = 8 - 8 + 1 = 1$; $P(3) = 27 - 18 + 1 = 10$. Cohérent.

Réponse. $P = X^3 - 2X^2 + 1$.

Correction de l'exercice 7 – Relations coefficients-racines

Fonctions symétriques élémentaires : $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 4$ (signes alternés des coefficients).

— $x_1 + x_2 + x_3 = \sigma_1 = 2$.

— Pour la somme des carrés, on utilise l'identité

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

— Soit $4 - 6 = -2$.

— **Remarque** : une somme de carrés **négative** confirme que les racines ne sont pas toutes réelles. Effectivement, le polynôme a une racine réelle ($\approx 1{,}65$) et deux racines complexes conjuguées.

— **Puissance de la méthode** : on obtient ces sommes **sans calculer les racines**, ce qui est essentiel car elles ne sont pas exprimables simplement ici.

Réponse. $\sigma_1 = 2$ et $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2$.

Correction de l'exercice 8 – Polynôme et parité

On écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

— Alors $P(-X) = \sum_k a_k (-1)^k X^k$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— L'égalité $P(-X) = P(X)$ impose, par **unicité des coefficients**, $a_k(-1)^k = a_k$ pour tout k.
— Pour k **impair**, $(-1)^k = -1$, donc $2a_k = 0$: $a_k = 0$.
— Pour k **pair**, la relation est automatiquement vérifiée.
— **Conclusion** : P est pair si et seulement si seuls ses coefficients de rang **pair** sont non nuls, c'est-à-dire $P(X) = Q(X^2)$ pour un certain $Q \in \mathbb{R}[X]$.
— **Exemples** : $X^4 - 3X^2 + 1 = Q(X^2)$ avec $Q(Y) = Y^2 - 3Y + 1$.

Réponse. Exactement les $P(X) = Q(X^2)$ (coefficients impairs nuls).

Correction de l'exercice 9 – Interpolation de Lagrange

Base de Lagrange associée aux points 0, 1, 2 :

$$L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{(X-1)(X-2)}{2}$$

$$L_1 = \frac{X(X-2)}{(1)(1-2)} = -X(X-2) \qquad L_2 = \frac{X(X-1)}{2}$$

— Chaque L_i vaut 1 au point i et 0 aux autres.
— **Polynôme interpolateur** : $P = 1 \times L_0 + 3 \times L_1 + 2 \times L_2$.

$$P = \frac{(X-1)(X-2)}{2} - 3X(X-2) + X(X-1)$$

— On développe : $\frac{X^2 - 3X + 2}{2} - 3X^2 + 6X + X^2 - X = \left(\frac{1}{2} - 2\right)X^2 + \left(-\frac{3}{2} + 5\right)X + 1$.
— **Résultat** : $P = -\frac{3}{2}X^2 + \frac{7}{2}X + 1$.
— **Vérification** : $P(1) = -1{,}5 + 3{,}5 + 1 = 3$; $P(2) = -6 + 7 + 1 = 2$; $P(0) = 1$. Cohérent.
— **Unicité** : il existe un unique polynôme de degré $\leq n$ passant par $n+1$ points d'abscisses distinctes.

Réponse. $P = -\frac{3}{2}X^2 + \frac{7}{2}X + 1$.

Correction de l'exercice 10 – Divisibilité et racines communes

$X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ divise P si et seulement si 1 et -1 sont racines de P.

— $P(1) = 1 + a - a - 1 = 0$: vrai **pour toute** valeur de a.
— $P(-1) = 1 + a - a - 1 = 0$: également vrai pour tout a (les puissances sont paires).
— **Conclusion** : $X^2 - 1$ divise P pour **tout** réel a.
— **Vérification par factorisation** :
$P = X^4 - 1 + a(X^2 - 1) = (X^2 - 1)(X^2 + 1) + a(X^2 - 1) = (X^2 - 1)(X^2 + 1 + a)$.
— On voit directement le quotient : $Q = X^2 + a + 1$.
— **Leçon** : reconnaître un **facteur commun** évite un calcul de division.

Réponse. Pour tout a : $P = (X^2 - 1)(X^2 + a + 1)$.

Correction de l'exercice 11 – Polynôme scindé et dérivée

Notons $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ les n racines de P.

— Sur chaque intervalle $[x_i\,;x_{i+1}]$, P est continue, dérivable, et $P(x_i) = P(x_{i+1}) = 0$.
— Le **théorème de Rolle** fournit $c_i \in]x_i\,;x_{i+1}[$ tel que $P'(c_i) = 0$.
— Il y a $n-1$ tels intervalles, donc $n-1$ racines $c_1 < c_2 < \ldots < c_{n-1}$ **distinctes** (chacune dans son intervalle).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Or $\deg P' = n-1$: P' a exactement $n-1$ racines réelles, toutes simples. P' est donc **scindé à racines simples**.
— **Conséquence** : les racines de P' **s'intercalent** strictement entre celles de P (propriété d'entrelacement).
— **Exemple** : $P = X(X-1)(X-2)$ donne $P' = 3X^2 - 6X + 2$, de racines $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, soit $\approx 0{,}42$ et $\approx 1{,}58$. Elles sont bien dans $]0\,;1[$ et $]1\,;2[$.

Réponse. Rolle sur chaque $[x_i\,;x_{i+1}]$ donne $n-1$ racines distinctes de P'.

Correction de l'exercice 12 – Reste modulo un carré

Le diviseur est de degré 2 : le reste s'écrit $R = aX + b$, et $X^n = (X-1)^2 Q + aX + b$.

— 1 est racine **double** de $(X-1)^2$: on évalue en 1, puis on **dérive** avant d'évaluer, car la dérivée de $(X-1)^2 Q$ s'annule encore en 1 :

$$(X-1)^2 Q \text{ et } \Big((X-1)^2 Q\Big)' = 2(X-1)Q + (X-1)^2 Q' \text{ s'annulent en } 1$$

— En $X=1$: $1 = a + b$.
— Après dérivation, $nX^{n-1} = \Big((X-1)^2 Q\Big)' + a$, et en $X=1$: $n = a$.
— Donc $a = n$, $b = 1-n$: $R = nX - (n-1)$.
— **Contrôle** $n=2$: $X^2 = (X-1)^2 + 2X - 1$ ✓. $n=3$: $X^3 - (3X-2) = X^3 - 3X + 2 = (X-1)^2(X+2)$ ✓.

Méthode : pour un diviseur à racine multiple, on complète l'évaluation par les dérivées (autant que l'ordre de multiplicité).

Réponse. $R = nX - (n-1)$.

Correction de l'exercice 13 – Condition de racine double

Une racine multiple de P est une racine **commune** à P et à P' :

$$r \text{ racine multiple de } P \Leftrightarrow P(r) = 0 \text{ et } P'(r) = 0$$

— $P' = 3X^2 - 3 = 3(X-1)(X+1)$: les candidats sont 1 et -1.
— $P(1) = 1 - 3 + a = a - 2$: 1 est racine multiple si et seulement si $a = 2$.
— $P(-1) = -1 + 3 + a = a + 2$: -1 est racine multiple si et seulement si $a = -2$.

Factorisations (la somme des trois racines vaut 0, coefficient de X^2 nul) :

— $a = 2$: racines $1, 1, -2$, donc $X^3 - 3X + 2 = (X-1)^2(X+2)$. Contrôle : $(X^2 - 2X + 1)(X+2) = X^3 - 3X + 2$ ✓.
— $a = -2$: racines $-1, -1, 2$, donc $X^3 - 3X - 2 = (X+1)^2(X-2)$.

Dans les deux cas, $P''(r) = 6r \neq 0$: la racine est exactement **double**. Pour $a \notin \{-2, 2\}$, toutes les racines sont simples.

Réponse. $a = 2$: $(X-1)^2(X+2)$; $a = -2$: $(X+1)^2(X-2)$.

Correction de l'exercice 14 – Factoriser $X^6 - 1$

Dans $\mathbb{C}[X]$: les racines sont les racines sixièmes de l'unité ω^k, $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$, $0 \leq k \leq 5$, toutes simples :

$$X^6 - 1 = \prod_{k=0}^{5} \left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/3}\right)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Dans $\mathbb{R}[X]$: les racines réelles sont 1 ($k=0$) et -1 ($k=3$). On regroupe les autres par paires conjuguées, avec $(X-z)(X-\overline{z}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(z)X + |z|^2$:

— $k=1$ et $k=5$: $\mathrm{Re} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, facteur $X^2 - X + 1$;

— $k=2$ et $k=4$: $\mathrm{Re} = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, facteur $X^2 + X + 1$.

Résultat : $X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)$.

— **Contrôle** : $X^6 - 1 = (X^3-1)(X^3+1)$, avec $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$ et $X^3 + 1 = (X+1)(X^2-X+1)$ ✓.

Réponse. $(X-1)(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : équation fonctionnelle

Le polynôme nul convient. On suppose désormais $P \neq 0$.

Étape 1 : P **est unitaire.** Si a est le coefficient dominant et $n = \deg P$, celui de $P(X^2)$ est a et celui de $P(X)^2$ est a^2.

— Donc $a = a^2$ avec $a \neq 0$, d’où $a = 1$.

Étape 2 : la seule racine possible est 0**.** Raisonnons dans $\mathbb{C}$ et supposons que P admette une racine $z \neq 0$.

— Soit w une racine carrée complexe de z. Alors $P(w)^2 = P(w^2) = P(z) = 0$, donc w est racine de P ; il en va de même pour $-w$.

— Comme $z \neq 0$, on a $w \neq -w$: chaque racine non nulle **engendre deux nouvelles racines**, elles-mêmes non nulles.

— En itérant, on obtient 2^k racines deux à deux distinctes à l’étape k (les racines carrées de nombres distincts sont distinctes).

— P aurait donc une **infinité** de racines, ce qui est impossible pour un polynôme non nul.

Étape 3 : conclusion. P est unitaire et sa seule racine complexe est 0 ; d’après d’Alembert-Gauss, $P = X^n$.

— **Réciproque** : $P = X^n$ convient bien, car $P(X^2) = X^{2n} = \left(X^n\right)^2$.

— **Solutions** : $P = 0$ et $P = X^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ (le cas $n = 0$ donnant $P = 1$).

— **Contrôle** : $P = X^2 + 1$ ne convient pas, car $P(X^2) = X^4 + 1$ alors que $P(X)^2 = X^4 + 2X^2 + 1$.

Réponse. $P = 0$ ou $P = X^n$, $n \in \mathbb{N}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).