Plaquette 3 – Racines, multiplicités et polynômes scindés

Polynômes — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Racines et multiplicités.

— a racine de $P \Leftrightarrow (X-a) \mid P$. Multiplicité m : $(X-a)^m \mid P$ et $(X-a)^{m+1} \nmid P$, soit

$$P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(m-1)}(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad P^{(m)}(a) \neq 0$$

— Une racine de multiplicité $m \geq 1$ de P est racine de multiplicité $m-1$ de P'. Les racines **multiples** de P sont les racines **communes** à P et P'.

— **Nombre de racines** : un polynôme non nul de degré n a au plus n racines comptées avec multiplicité ; deux polynômes de degré $\leq n$ égaux en $n+1$ points sont égaux.

— **Scindé** : $P = a\prod_i (X-x_i)^{m_i}$; tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ l'est (d'Alembert-Gauss). Alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_i \frac{m_i}{X-x_i}$$

— **Racines rationnelles** : si $\frac{p}{q}$ (irréductible) est racine de $P \in \mathbb{Z}[X]$, alors $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.

— **Rolle** : si $P \in \mathbb{R}[X]$ a k racines réelles distinctes, P' en a au moins $k-1$, intercalées.

Correction de l'exercice 1 – Une racine triple

On applique le critère des dérivées successives en 1 :

$$1 \text{ racine d'ordre } m \Leftrightarrow P(1) = \ldots = P^{(m-1)}(1) = 0 \text{ et } P^{(m)}(1) \neq 0$$

a) $P(1) = 1 - n + n - 1 = 0$.

— $P' = 2nX^{2n-1} - n(n+1)X^n + n(n-1)X^{n-2}$ et $P'(1) = 2n - n^2 - n + n^2 - n = 0$.

— $P'' = 2n(2n-1)X^{2n-2} - n^2(n+1)X^{n-1} + n(n-1)(n-2)X^{n-3}$, et $P''(1) = n\big(4n - 2 - n^2 - n + n^2 - 3n + 2\big) = 0$.

b) $P'''(1) = 2n(2n-1)(2n-2) - n^2(n+1)(n-1) + n(n-1)(n-2)(n-3)$. On factorise $n(n-1)$:

— $P'''(1) = n(n-1)[4(2n-1) - n(n+1) + (n-2)(n-3)] = n(n-1)(8n - 4 - n^2 - n + n^2 - 5n + 6) = n(n-1)(2n+2)$.

C'est $2n(n-1)(n+1) \neq 0$ pour $n \geq 2$: 1 est racine **triple**.

c) $n = 2$: $P = X^4 - 2X^3 + 2X - 1 = (X-1)^3(X+1)$ (développer : $(X^3 - 3X^2 + 3X - 1)(X+1) = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$ ✓), et $P'''(1) = 2 \times 2 \times 1 \times 3 = 12$, comme $24 - 12$ ✓.

d) n pair : $(-1)^{2n} = 1$, $(-1)^{n+1} = -1$, $(-1)^{n-1} = -1$, donc $P(-1) = 1 + n - n - 1 = 0$. Pour $n = 2$, c) montre que -1 est racine **simple**.

Réponse. $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$, $P'''(1) = 2n(n-1)(n+1)$: racine triple ; $n = 2$: $(X-1)^3(X+1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Une racine double et son quotient

a) $P_n(1) = n - (n+1) + 1 = 0$. $P_n' = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1}$, donc $P_n'(1) = 0$. $P_n'' = n^2(n+1)X^{n-1} - n(n+1)(n-1)X^{n-2}$, donc

$$P_n''(1) = n(n+1)(n-(n-1)) = n(n+1) \neq 0$$

— 1 est racine **double**.

b) $(X-1)S = X^{n+1} - 1$. En dérivant : $S + (X-1)S' = (n+1)X^n$. On multiplie par $X-1$ et on remplace $(X-1)S$:

— $X^{n+1} - 1 + (X-1)^2 S' = (n+1)X^{n+1} - (n+1)X^n$, d'où $(X-1)^2 S' = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 = P_n$.

Or $S' = \sum_{k=1}^{n} kX^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k$.

c) $n=1$: $P_1 = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ ✓. $n=2$: $P_2 = 2X^3 - 3X^2 + 1$ et $(X-1)^2(1+2X) = (X^2-2X+1)(2X+1) = 2X^3 - 3X^2 + 1$ ✓.

d) Pour $x > 0$, $\sum (k+1)x^k > 0$ (termes positifs, le premier vaut 1), et $(x-1)^2 > 0$ si $x \neq 1$: $P_n(x) > 0$.

— **Interprétation** : c'est l'inégalité $x^{n+1} \geq \frac{(n+1)x^n - 1}{n}$, cas d'égalité $x = 1$ — une inégalité de convexité obtenue par pure algèbre.

Réponse. 1 racine double ; $P_n = (X-1)^2 \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k$; $P_n(x) > 0$ pour $x > 0$, $x \neq 1$.

Correction de l'exercice 3 – Racines simples de $X^n + X + 1$

Une racine multiple est une racine **commune** à P et à P' :

$$z \text{ racine multiple} \Leftrightarrow P(z) = 0 \text{ et } P'(z) = 0$$

a) $P'(z) = nz^{n-1} + 1 = 0$ donne $z^{n-1} = -\frac{1}{n}$, donc $z^n = z \cdot z^{n-1} = -\frac{z}{n}$. En reportant dans $P(z) = 0$:

— $-\frac{z}{n} + z + 1 = 0$, soit $z\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1$, d'où $z = -\frac{n}{n-1}$ $(n \geq 2)$.

b) Alors $|z| = \frac{n}{n-1} > 1$, donc $|z|^{n-1} > 1$; mais $|z^{n-1}| = \frac{1}{n} < 1$. Contradiction.

c) P n'a aucune racine multiple : ses n racines complexes (d'Alembert-Gauss) sont **distinctes**.

d) $X^3 - 3X + 2 = (X-1)^2(X+2)$ a une racine double. Ici $P' = 3X^2 - 3$, $P'(z) = 0$ impose $z = \pm 1$, et $P(1) = 0$: le « $+1$ » de $X^n + X + 1$ est remplacé par d'autres coefficients, et la contradiction de b) n'apparaît plus. La méthode (éliminer entre $P = 0$ et $P' = 0$) reste la bonne ; seule la conclusion change.

Réponse. Une racine multiple vérifierait $z = -\frac{n}{n-1}$ et $|z|^{n-1} = \frac{1}{n}$: impossible ; $X^n + X + 1$ a n racines distinctes.

Correction de l'exercice 4 – Un polynôme qui s'annule trop est nul

Le principe : un polynôme non nul de degré n a au plus n racines, donc

$$P \text{ a une infinité de racines} \Rightarrow P = 0$$

a) $[0,1]$ est infini et P s'y annule : $P = 0$.

b) $P - Q$ s'annule sur l'ensemble infini $\mathbb{N}$: $P - Q = 0$.

c) Si un tel P existait, $P - X$ s'annulerait sur $[0,1]$, donc $P = X$ par a) ; mais alors

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$P(-1) = -1 \neq |-1| = 1$. Contradiction.

d) Si sin coïncidait avec un polynôme P sur $\mathbb{R}$, P s'annulerait sur $\pi\mathbb{Z}$, infini : $P = 0$, alors que $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Absurde.

— Pour exp : si exp $= P$ avec $\deg P = d$, alors $P^{(d+1)} = 0$ alors que $\exp^{(d+1)} = \exp$ ne s'annule jamais. Absurde (et $P = 0$ est exclu).

Méthode : pour montrer une identité entre polynômes, il suffit de la vérifier en une infinité de points (ou en $n+1$ points si les degrés sont $\leq n$).

Réponse. Infinité de racines $\Rightarrow P = 0$; coïncidence sur $\mathbb{N} \Rightarrow$ égalité ; $|x|$, sin, exp ne sont pas polynomiales.

Correction de l'exercice 5 – Racines rationnelles

a) On multiplie $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ par q^n :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

— p divise tous les termes sauf peut-être $a_0 q^n$, donc $p \mid a_0 q^n$; comme $p \wedge q = 1$, Gauss donne $p \mid a_0$. Symétriquement $q \mid a_n p^n$, donc $q \mid a_n$.

b) Candidats $\pm 1, \pm\frac{1}{2}$. $P(1) = 2 \neq 0$, et $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 - 1 = 0$. On factorise :

— $2X^3 - X^2 + 2X - 1 = X^2(2X-1) + (2X-1) = (2X-1)(X^2+1)$, et X^2+1 est irréductible sur $\mathbb{R}$.

c) Candidats ± 1 : $P(1) = -1$, $P(-1) = -1$. Aucune racine rationnelle. Un polynôme de degré 3 réductible dans $\mathbb{Q}[X]$ aurait un facteur de degré 1, donc une racine rationnelle : P est **irréductible** sur $\mathbb{Q}$.

d) $\sqrt[3]{2}$ est racine de $X^3 - 2$, dont les candidats rationnels sont $\pm 1, \pm 2$; aucun ne convient ($1, -1, 8, -8 \neq 2$). Donc $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

Réponse. $p \mid a_0$, $q \mid a_n$; $(2X-1)(X^2+1)$; $X^3 - X - 1$ irréductible sur $\mathbb{Q}$; $\sqrt[3]{2}$ irrationnel.

Correction de l'exercice 6 – Rolle et nombre de racines réelles

a) $P' = 5X^4 - 5 = 5(X^2-1)(X^2+1)$ s'annule en ± 1 seulement. P croît sur $]-\infty, -1]$, décroît sur $[-1, 1]$, croît sur $[1, +\infty[$, avec

$$P(-1) = -1 + 5 + 1 = 5, \qquad P(1) = 1 - 5 + 1 = -3$$

b) Sur chacun des trois intervalles de monotonie, P est strictement monotone et change de signe :

— $P(-2) = -32 + 10 + 1 = -21 < 0 < P(-1) = 5$: une racine dans $]-2, -1[$;

— $P(0) = 1 > 0 > P(1) = -3$: une racine dans $]0, 1[$;

— $P(1) = -3 < 0 < P(2) = 32 - 10 + 1 = 23$: une racine dans $]1, 2[$.

Hors de $[-2, 2]$, P garde le signe de x^5 et n'a pas d'autre racine : exactement **trois** racines réelles.

c) Entre deux racines consécutives de P, Rolle fournit une racine de P', strictement entre elles. r racines distinctes de P donnent donc $r-1$ racines distinctes de P' : $r - 1 \leq k$.

d) P a 5 racines complexes comptées avec multiplicité ; les trois réelles sont simples (P' ne s'annule qu'en ± 1, qui ne sont pas racines de P). Il reste **deux** racines non réelles, **conjuguées** car P est à coefficients réels ($P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$).

Réponse. Maximum local 5 en -1, minimum -3 en 1 ; trois racines réelles dans $]-2, -1[$, $]0, 1[$, $]1, 2[$; deux racines complexes conjuguées.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Interpolation d'Hermite

a) $P(0)=0$ et $P'(0)=1$ imposent $P=aX^3+bX^2+X$. Les deux autres conditions :

$$P(1)=a+b+1=1, \qquad P'(1)=3a+2b+1=0$$

— La première donne $a=-b$, la seconde $-3b+2b+1=0$, soit $b=1$ et $a=-1$.

— $P=-X^3+X^2+X$. Contrôle : $P(1)=-1+1+1=1$ et $P'(1)=-3+2+1=0$ ✓.

b) Si P_1 et P_2 conviennent, $D=P_1-P_2$ est de degré ≤ 3 avec $D(0)=D'(0)=0$ et $D(1)=D'(1)=0$: 0 et 1 sont racines **doubles**, donc $X^2(X-1)^2 \mid D$. Un multiple non nul serait de degré ≥ 4 : $D=0$.

c) P part de l'origine avec la pente 1 (tangente $y=x$) et arrive en $(1,1)$ avec une tangente horizontale : la courbe raccorde **sans cassure** la droite $y=x$ (pour $x\leq 0$) et la droite $y=1$ (pour $x\geq 1$). C'est le principe des raccords de routes et de rails.

d) Si $\deg P\leq 2$, alors $a=0$ dans le calcul de a), et le système $b+1=1$, $2b+1=0$ est incompatible. Quatre conditions demandent quatre coefficients : le degré 3 est nécessaire.

Réponse. $P=-X^3+X^2+X$, unique ; impossible en degré ≤ 2.

Correction de l'exercice 8 – Les polynômes de Tchebychev

a) $T_2=2X^2-1$, $T_3=2X(2X^2-1)-X=4X^3-3X$,
$T_4=2X(4X^3-3X)-(2X^2-1)=8X^4-8X^2+1$.

b) Vrai pour $n=0$ et $n=1$. Si c'est vrai aux rangs $n-1$ et n, la formule de trigonométrie donne

$$T_{n+1}(\cos\theta)=2\cos\theta\cos(n\theta)-\cos((n-1)\theta)=\cos((n+1)\theta)$$

c) Si T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}, $2XT_n$ l'est de degré $n+1$ et de coefficient 2^n, et T_{n-1} ne le modifie pas. Unicité : deux polynômes vérifiant b) coïncident sur $[-1,1]$ (image de cos), ensemble infini, donc sont égaux.

d) $T_n(\cos\theta)=0 \Leftrightarrow n\theta\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$. Les réels

— $x_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $0\leq k\leq n-1$,

sont **distincts** (cos est injectif sur $[0,\pi]$, et les angles y sont distincts) et dans $]-1,1[$. Ce sont n racines d'un polynôme de degré n : ce sont **toutes** les racines, simples, et $T_n=2^{n-1}\prod_k(X-x_k)$.

— $T_3=X(4X^2-3)$: racines 0 et $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, soit $\cos\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{5\pi}{6}$ ✓.

Réponse. $T_2=2X^2-1$, $T_3=4X^3-3X$, $T_4=8X^4-8X^2+1$; $T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$; racines $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$.

Correction de l'exercice 9 – Polynômes positifs sur R

a) Si le coefficient dominant a était négatif, $P(x)\sim ax^n$ tendrait vers $-\infty$ en $+\infty$ (ou en $-\infty$ selon la parité). Si r était racine réelle de multiplicité impaire, $P=(X-r)^mS$ avec $S(r)\neq 0$ et m impair : P changerait de signe en r. Contradiction dans les deux cas.

b) Dans $\mathbb{C}[X]$: $P=a\prod_i(X-r_i)^{2k_i}\prod_j(X-z_j)(X-\overline{z}_j)$, les racines non réelles allant par paires conjuguées. On pose

— $R=\prod(X-r_i)^{k_i}$, $Q=\prod_j(X-z_j)$, de sorte que $\overline{Q}=\prod_j(X-\overline{z}_j)$ et $P=aR^2Q\overline{Q}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $Q\overline{Q} = (A + \mathrm{i}B)(A - \mathrm{i}B) = A^2 + B^2$, donc

$$P = (\sqrt{a}\,RA)^2 + (\sqrt{a}\,RB)^2$$

d) $X^4 + 1 = (X^2 - 1)^2 + \left(\sqrt{2}X\right)^2$: en effet $X^4 - 2X^2 + 1 + 2X^2 = X^4 + 1$ ✓.

— $X^2 - 2X + 5 = (X - 1)^2 + 2^2$ (racines $1 \pm 2\mathrm{i}$, $Q = X - 1 - 2\mathrm{i}$, $A = X - 1$, $B = -2$) ✓.

Réponse. Coefficient dominant > 0, racines réelles de multiplicité paire ; $P = c\,R^2 Q\overline{Q} = (\sqrt{c}RA)^2 + (\sqrt{c}RB)^2$; $X^4 + 1 = (X^2 - 1)^2 + (\sqrt{2}X)^2$, $X^2 - 2X + 5 = (X - 1)^2 + 2^2$.

Correction de l'exercice 10 – Les polynômes divisibles par leur dérivée

a) $\deg P' = n - 1$, donc le quotient Q de P par P' est de degré 1. En comparant les coefficients dominants (c pour P, nc pour P'), le coefficient dominant de Q est $\frac{1}{n}$: $Q = \frac{1}{n}(X - a)$.

b) z est racine de multiplicité m de P et $m - 1$ de P'. Dans $(X - a)P'$, sa multiplicité est $m - 1$ si $z \neq a$, et m si $z = a$. L'égalité $P = \frac{1}{n}(X - a)P'$ impose donc

$$\mathrm{mult}_z((X - a)P') = \begin{cases} m - 1 & \text{si } z \neq a \\ m & \text{si } z = a \end{cases}$$

— et elle doit valoir m : donc $z = a$.

c) P est scindé sur $\mathbb{C}$ et n'a que a pour racine : $P = c(X - a)^n$. Réciproquement $P' = nc(X - a)^{n-1}$ divise bien P.

d) $P = c(X - a)^3$; pour P réel, $a = -\frac{\text{coefficient de } X^2}{3c}$ est réel. $P(0) = -ca^3 = 0$ donne $a = 0$, puis $P(1) = c = 8$: $P = 8X^3$.

Réponse. $P' \mid P \Leftrightarrow P = c(X - a)^n$; d) $P = 8X^3$.

Correction de l'exercice 11 – Racine commune à deux trinômes

a) Si $P(z) = Q(z) = 0$, la différence s'annule aussi :

$$P(z) - Q(z) = (a - 1)z + (1 - a) = (a - 1)(z - 1) = 0$$

b) Deux cas.

— $a = 1$: $P = Q = X^2 + X + 1$; les deux racines j et j^2 sont communes.

— $a \neq 1$: la racine commune est $z = 1$, et $P(1) = 2 + a = 0$ impose $a = -2$. Alors $P = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ et $Q = X^2 + X - 2 = (X - 1)(X + 2)$: racine commune 1.

Pour toute autre valeur de a, pas de racine commune.

c) $a = 1$: $P \wedge Q = X^2 + X + 1$. $a = -2$: $P \wedge Q = X - 1$ (la racine 1 est double dans P mais simple dans Q). Sinon $P \wedge Q = 1$.

Méthode : une combinaison $uP + vQ$ bien choisie (ici $P - Q$) fait baisser le degré ; c'est le premier pas de l'algorithme d'Euclide.

Réponse. $a = 1$: racines communes j, j^2 ; $a = -2$: racine commune 1, PGCD $X - 1$; sinon aucune.

Correction de l'exercice 12 – Trois racines réelles : une condition nécessaire

a) Relations coefficients-racines : $\sigma_1 = -a$, $\sigma_2 = b$. Donc

$$\sum x_i^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = a^2 - 2b$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2 = 2\sum x_i^2 - 2\sum_{i<j}x_ix_j = 2(a^2-2b)-2b = 2(a^2-3b)$.

b) Si les racines sont réelles, $\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2 \geq 0$, donc $a^2 \geq 3b$; égalité si et seulement si tous les carrés sont nuls, c'est-à-dire $x_1 = x_2 = x_3$.

c) $a = b = 1$: $a^2 = 1 < 3 = 3b$: les racines ne sont pas toutes réelles. En effet $X^3+X^2+X+1 = X^2(X+1)+(X+1) = (X+1)(X^2+1)$, de racines $-1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$ ✓.

d) X^3+1 : $a = b = 0$, et $a^2 = 0 \geq 0 = 3b$, mais ses racines sont -1, $-j$, $-j^2$: deux ne sont pas réelles. La condition est **nécessaire, pas suffisante** (le critère exact fait intervenir le discriminant).

Réponse. $\sum x_i^2 = a^2-2b$, $\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2 = 2(a^2-3b)$; racines réelles $\Rightarrow a^2 \geq 3b$; $X^3+X^2+X+1 = (X+1)(X^2+1)$; non suffisant (X^3+1).

Correction de l'exercice 13 – Points fixes d'un polynôme itéré

a) Pour un monôme, $X^k - Y^k = (X-Y)\sum_{i=0}^{k-1} X^i Y^{k-1-i}$; par linéarité, $P(X)-P(Y) = (X-Y)S(X,Y)$. En remplaçant Y par X et X par $P(X)$:

$$P(P(X)) - P(X) = (P(X)-X)\,S(P(X),X)$$

b) On écrit $P(P(X))-X = [P(P(X))-P(X)] + [P(X)-X]$: les deux crochets sont multiples de $P(X)-X$.

c) $P(P(X)) = (X^2-2)^2 - 2 = X^4-4X^2+2$, donc $P\circ P - X = X^4-4X^2-X+2$. Par b), il est divisible par X^2-X-2 ; la division donne

— $X^4-4X^2-X+2 = (X^2-X-2)(X^2+X-1)$; contrôle : $X^4+X^3-X^2-X^3-X^2+X-2X^2-2X+2 = X^4-4X^2-X+2$ ✓.

— Factorisation : $(X-2)(X+1)\left(X-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

d) 2 et -1 sont les **points fixes** de P. Les racines $u = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $v = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ vérifient $P(P(u)) = u$ sans être fixes : P les **échange**. Contrôle : $u^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, donc $P(u) = u^2-2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = v$ ✓. C'est un cycle d'ordre 2.

Réponse. $P(X)-X \mid P(P(X))-X$; $X^4-4X^2-X+2 = (X-2)(X+1)(X^2+X-1)$; P échange les racines de X^2+X-1.

Correction de l'exercice 14 – Racine double de $(X+1)^n - X^n - 1$

a) $1+j+j^2 = 0$ donne $j+1 = -j^2 = -\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$.

b) j est racine au moins double si et seulement si $P_n(j) = P_n'(j) = 0$. Avec $P_n' = n\left((X+1)^{n-1} - X^{n-1}\right)$:

$$P_n'(j) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\pi/3} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(n-1)\pi/3} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\pi/3} = 1 \Leftrightarrow 6 \mid n-1$$

— Combinée à $P_n(j) = 0$ ($n \equiv \pm 1$), la condition est $n \equiv 1 \pmod 6$.

c) P_7 est de degré 6 (X^7 disparaît), de coefficient dominant $\binom{7}{6} = 7$. Ses racines : 0 ($P_7(0) = 1-0-1 = 0$), -1 ($0+1-1=0$, car $(-1)^7 = -1$), et j, j^2 **doubles** par b) ($7 \equiv 1 \pmod 6$; $j^2 = \bar{j}$ par conjugaison).

— Cela fait $1+1+2+2 = 6$ racines comptées avec multiplicité : $P_7 = 7X(X+1)(X-j)^2(X-j^2)^2 = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2$.

— Contrôle numérique en $X = 1$: $2^7 - 1 - 1 = 126$ et $7\times 1\times 2\times 3^2 = 126$ ✓.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. j racine double $\Leftrightarrow n \equiv 1 \pmod 6$; $P_7 = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : dérivée logarithmique d'un polynôme scindé

a) La dérivée d'un produit de n facteurs est la somme des produits où l'on dérive un seul facteur ; ici chaque $(X-x_i)' = 1$. En divisant par $P(a)$:

$$\frac{P'(a)}{P(a)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\prod_{j \neq i}(a-x_j)}{\prod_j (a-x_j)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a-x_i}$$

b) Les ω^k sont les racines de $X^n - 1$. Avec $a = 2$:

— $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2-\omega^k} = \frac{n2^{n-1}}{2^n-1}$.

— $n=2$: $\frac{1}{2-1} + \frac{1}{2+1} = \frac{4}{3}$ et $\frac{2\times 2}{3} = \frac{4}{3}$ ✓.

c) Sur un intervalle sans racine, $\frac{P'}{P} = \sum \frac{1}{x-x_i}$ a pour dérivée $-\sum \frac{1}{(x-x_i)^2} < 0$: elle décroît strictement. Or

— $\left(\frac{P'}{P}\right)' = \frac{P''P - P'^2}{P^2} \leq 0$, d'où $P'(x)^2 \geq P(x)P''(x)$ hors des racines ; en une racine x_i, $P(x_i) = 0$ et l'inégalité $P'(x_i)^2 \geq 0$ est évidente.

d) $P = X^2 - 1$: $P'^2 - PP'' = 4x^2 - 2(x^2-1) = 2x^2 + 2 > 0$ ✓.

— $P = X^2 + 1$ (non scindé sur $\mathbb{R}$) : $4x^2 - 2(x^2+1) = 2x^2 - 2 < 0$ pour $|x| < 1$: l'inégalité est **fausse** en 0. L'hypothèse « scindé sur $\mathbb{R}$ » est indispensable.

Réponse. $\frac{P'}{P} = \sum \frac{1}{X-x_i}$; $\sum_k \frac{1}{2-\omega^k} = \frac{n2^{n-1}}{2^n-1}$; $P'^2 \geq PP''$ si P est scindé sur $\mathbb{R}$; faux pour X^2+1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).