Plaquette 4 – Relations coefficients-racines et factorisations

Polynômes — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Relations coefficients-racines. Si $P = a_n X^n + \dots + a_0 = a_n \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$, les fonctions symétriques élémentaires valent

$$\sigma_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

— Degré 3, $P = X^3 + aX^2 + bX + c$: $\sigma_1 = -a$, $\sigma_2 = b$, $\sigma_3 = -c$.

— Identités utiles : $\sum x_i^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$; $\sum \frac{1}{x_i} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}$; et, en degré 3, $\sum x_i^2 x_j^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3$.

— **Sommes de Newton** $s_p = \sum x_i^p$: si $P(x_i) = 0$, alors x_i^p se réduit grâce à P.

— **Racines de l'unité** : $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k)$, $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$, et

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \begin{cases} n & \text{si } n \mid p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

— **Factorisation réelle** : $(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) = X^2 - 2\cos\theta\, X + 1$.

Correction de l'exercice 1 – Sommes de puissances des racines

a) $P = X^3 + 0X^2 - 2X + 5$, donc $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -2$, $\sigma_3 = -5$.

b) $s_1 = \sigma_1 = 0$. Pour les carrés, on développe σ_1^2 :

$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 0 + 4 = 4$$

— $\sum \frac{1}{x_i} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$.

c) En sommant $x_i^3 = 2x_i - 5$: $s_3 = 2s_1 - 15 = -15$. En multipliant par x_i : $x_i^4 = 2x_i^2 - 5x_i$, d'où $s_4 = 2s_2 - 5s_1 = 8$.

d) $x \mapsto x^3 - 2x + 5$ a pour dérivée $3x^2 - 2$, nulle en $\pm\sqrt{2/3}$; au minimum local $x = \sqrt{2/3} \approx 0{,}82$, la valeur est $\approx 0{,}54 - 1{,}63 + 5 > 0$. Une seule racine réelle (négative, car $P(-3) = -16 < 0 < P(0)$), et deux racines complexes conjuguées.

— **Remarque** : le signe de s_2 ne suffit pas à conclure. Une valeur $s_2 < 0$ prouverait l'existence de racines non réelles, mais $s_2 = 4 > 0$ est compatible avec les deux situations ; d'où l'étude de fonction.

Réponse. $\sigma = (0, -2, -5)$; $s_1 = 0$, $s_2 = 4$, $\sum \frac{1}{x_i} = \frac{2}{5}$, $s_3 = -15$, $s_4 = 8$; une seule racine réelle.

Correction de l'exercice 2 – Un système symétrique

a) $(X - x)(X - y)(X - z) = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$, donc x, y, z sont les racines de

$$P = X^3 - 2X^2 - X + 2$$

— (réciproquement, les trois racines de P, dans n'importe quel ordre, vérifient le système).

b) $P = X^2(X - 2) - (X - 2) = (X - 2)(X^2 - 1) = (X - 2)(X - 1)(X + 1)$. Les racines sont 2, 1, -1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Contrôle : $2+1-1=2$; $2-1-2=-1$; $2\times1\times(-1)=-2$ ✓.

c) $\{x,y,z\}=\{-1,1,2\}$: les $3!=6$ permutations donnent **six** triplets solutions.

d) x et y sont les racines de X^2-5X+7, de discriminant $25-28=-3<0$: $\{x,y\}=\left\langle\frac{5\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\rangle$, **non réels**.

— Morale : on ne peut pas choisir librement somme et produit de deux réels ; il faut $s^2\geq 4p$.

Réponse. $X^3-2X^2-X+2=(X-2)(X-1)(X+1)$: $\{x,y,z\}=\{-1,1,2\}$, six triplets ; d) $\frac{5\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Correction de l’exercice 3 – Racines en progression arithmétique

a) La somme des racines vaut $\sigma_1=9$, et $(m-r)+m+(m+r)=3m$: $m=3$.

b) $m=3$ est racine : $P(3)=27-81+3a-15=3a-69=0$, donc $a=23$. Le produit des racines vaut $\sigma_3=15$:

$$(3-r)\times3\times(3+r)=3(9-r^2)=15$$

— donc $r^2=4$, $r=\pm2$: les racines sont $1,3,5$.

c) $(X-1)(X-3)(X-5)=(X^2-4X+3)(X-5)=X^3-9X^2+23X-15$ ✓.

d) La racine du milieu est $m=\frac{p}{3}$ (somme p). Si les racines sont en progression arithmétique, $\frac{p}{3}$ est racine : $P\left(\frac{p}{3}\right)=0$, soit, en multipliant par 27,

— $p^3-9p^3+9pq-27s=0$, c’est-à-dire $2p^3-9pq+27s=0$.

Réciproquement, si $\frac{p}{3}$ est racine, les deux autres ont pour somme $p-\frac{p}{3}=2\cdot\frac{p}{3}$: elles sont symétriques par rapport à $\frac{p}{3}$. Contrôle avec $(9,23,15)$:
$2\times729-9\times9\times23+27\times15=1\,458-1\,863+405=0$ ✓.

Réponse. $m=3$, $a=23$, racines $1,3,5$; condition générale $2p^3-9pq+27s=0$.

Correction de l’exercice 4 – Racines en progression géométrique

a) Le produit des racines vaut $\sigma_3=8$:

$$\frac{m}{r}\times m\times mr=m^3=8$$

— donc $m=2$ (seule racine cubique réelle de 8).

b) $P(2)=8-28+2b-8=2b-28=0$, donc $b=14$. La somme des racines vaut 7 : $\frac{2}{r}+2+2r=7$, soit $2r^2-5r+2=0$, d’où $r=2$ ou $r=\frac{1}{2}$ (même ensemble de racines).

— Racines : $1,2,4$. Contrôle :
$(X-1)(X-2)(X-4)=(X^2-3X+2)(X-4)=X^3-7X^2+14X-8$ ✓.

c) Avec les racines $\frac{m}{r},m,mr$: $s=m^3$, $p=m\left(\frac{1}{r}+1+r\right)$ et

— $q=\frac{m}{r}\cdot m+m\cdot mr+\frac{m}{r}\cdot mr=m^2\left(\frac{1}{r}+r+1\right)$.

Donc $q=m\,p$ et $q^3=m^3p^3=s\,p^3$.

— Contrôle : $p=7$, $q=14$, $s=8$: $14^3=2\,744$ et $7^3\times8=343\times8=2\,744$ ✓.

Réponse. $m=2$, $b=14$, racines $1,2,4$; condition $q^3=p^3s$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – Produit de sinus

a) $X^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(X-\omega^k)=(X-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X-\omega^k)$, et aussi $X^n-1=(X-1)(1+X+\dots+X^{n-1})$. On simplifie par $X-1$ (l'anneau $\mathbb{C}[X]$ est intègre).

b) On évalue a) en $X=1$: $\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^k)=1+1+\dots+1=n$.

c) On factorise l'angle moitié :

$$1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\right)=-2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$$

— donc $|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|=2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$. Avec $\theta=\frac{2k\pi}{n}$ et en prenant le module de b) : $\prod_{k=1}^{n-1}2\sin\frac{k\pi}{n}=n$ (les sinus sont positifs car $0<\frac{k\pi}{n}<\pi$), d'où la formule.

d) $n=3$: $\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{\sqrt3}{2}=\frac34=\frac{3}{2^2}$ ✓.

— $n=4$: $\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt2}{2}\times1\times\frac{\sqrt2}{2}=\frac12=\frac{4}{2^3}$ ✓.

Réponse. $\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^k)=n$; $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$.

Correction de l'exercice 6 – Valeur exacte de cos(2π/5)

a) Les racines sont $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/5}$, $0\le k\le4$. On regroupe $k=1$ avec $k=4$ et $k=2$ avec $k=3$ (conjuguées), en utilisant

$$\left(X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(X-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)=X^2-2\cos\theta\,X+1$$

— d'où $X^5-1=(X-1)(X^2-aX+1)(X^2-bX+1)$.

b) $(X^2-aX+1)(X^2-bX+1)=X^4-(a+b)X^3+(ab+2)X^2-(a+b)X+1$. Or ce produit vaut $\frac{X^5-1}{X-1}=X^4+X^3+X^2+X+1$. Identification : $a+b=-1$ et $ab+2=1$.

c) a et b sont les racines de t^2+t-1 : $t=\frac{-1\pm\sqrt5}{2}$. Comme $\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$, $a>0$:

— $a=\frac{\sqrt5-1}{2}$, donc $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt5-1}{4}\approx0{,}309$; $b=\frac{-1-\sqrt5}{2}$, donc $\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1+\sqrt5}{4}\approx-0{,}809$.

d) Deux sommets consécutifs sont 1 et $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/5}$; par l'exercice précédent, le côté vaut $2\sin\frac{\pi}{5}$, et

— $4\sin^2\frac{\pi}{5}=2\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)=2-\frac{\sqrt5-1}{2}=\frac{5-\sqrt5}{2}$, soit un côté $\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}\approx1{,}176$.

Réponse. $X^5-1=(X-1)(X^2-aX+1)(X^2-bX+1)$, $a+b=ab=-1$; $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt5-1}{4}$; côté $\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}$.

Correction de l'exercice 7 – Sommes sur les racines de l'unité

a) Si $n\mid p$, chaque terme vaut 1 : somme n. Sinon $q=\omega^p\neq1$ et la somme géométrique donne

$$\sum_{k=0}^{n-1}q^k=\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{(\omega^n)^p-1}{q-1}=0$$

b) $s_p=n$ si $n\mid p$, 0 sinon. Pour $p=1$: $s_1=\sigma_1=-\frac{a_{n-1}}{a_n}=0$, car X^n-1 n'a pas de terme en X^{n-1} ✓.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) On développe et on échange les sommes :

— $\sum_k (1+\omega^k)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sum_k \omega^{kp}$. Seuls $p=0$ et $p=n$ sont multiples de n : la somme vaut $n\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{n}\right) = 2n$.

— Contrôle $n=2$: $(1+1)^2+(1-1)^2 = 4 = 2\times 2$ ✓.

d) Avec $n=3$ dans a) (racines $1, j, j^2$) : $\frac{1}{3}(1+j^p+j^{2p})$ vaut 1 si $3 \mid p$, 0 sinon. Donc

— $\sum_{3\mid p}\binom{n}{p} = \frac{1}{3}\left[(1+1)^n+(1+j)^n+(1+j^2)^n\right]$, avec $1+j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ et $1+j^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$, dont les puissances n-ièmes ont pour somme $2\cos\frac{n\pi}{3}$.

— $n=6$: $\binom{6}{0}+\binom{6}{3}+\binom{6}{6} = 1+20+1 = 22$, et $\frac{64+2\cos 2\pi}{3} = \frac{66}{3} = 22$ ✓.

Réponse. $\sum \omega^{kp} = n$ si $n \mid p$, 0 sinon ; $\sum_k (1+\omega^k)^n = 2n$; $\sum_{3\mid p}\binom{n}{p} = \frac{2^n + 2\cos(n\pi/3)}{3}$.

Correction de l'exercice 8 – Polynôme dont les racines sont les carrés

a) Pour P : $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -1$, $\sigma_3 = 1$. Les identités de la boîte à outils donnent

$$\sigma_1' = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 2, \qquad \sigma_2' = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 = 1, \qquad \sigma_3' = \sigma_3^2 = 1$$

— (pour σ_2' : $(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2 = \sum x_i^2x_j^2 + 2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)$).

b) $Q = X^3 - \sigma_1' X^2 + \sigma_2' X - \sigma_3' = X^3 - 2X^2 + X - 1$.

c) $x^3 = x+1$ s'écrit $x(x^2-1) = 1$; en élevant au carré : $x^2(x^2-1)^2 = 1$. Avec $y = x^2$:

— $y(y-1)^2 = 1$, soit $y^3 - 2y^2 + y - 1 = 0$: on retrouve Q ✓.

d) $x \neq 0$ (car $P(0) = -1$) ; on divise $x^3 - x - 1 = 0$ par x^3 : $1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 0$. Avec $u = \frac{1}{x}$: $u^3 + u^2 - 1 = 0$. Le polynôme cherché est $X^3 + X^2 - 1$ (c'est le **polynôme réciproque** de P au signe près).

— Contrôle : $\sum \frac{1}{x_i} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = -1$, et pour X^3+X^2-1 la somme des racines est -1 ✓.

Réponse. $\sigma' = (2,1,1)$, $Q = X^3 - 2X^2 + X - 1$; racines $\frac{1}{x_i}$: $X^3 + X^2 - 1$.

Correction de l'exercice 9 – Trois réels de somme nulle

a) $(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3 = X^3 - 3X - abc$.

b) $f'(x) = 3x^2 - 3$ s'annule en ± 1 : maximum local $f(-1) = 2-p$, minimum local $f(1) = -2-p$. Les trois racines sont réelles (comptées avec multiplicité) si et seulement si la courbe coupe l'axe trois fois, c'est-à-dire

$$f(-1) \geq 0 \quad \text{et} \quad f(1) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq p \leq 2$$

— Si $p > 2$ ou $p < -2$, une seule racine réelle.

c) Les triplets réels existent si et seulement si $abc \in [-2,2]$: le produit est compris entre -2 et 2.

d) $p = 2$: $f(-1) = 2-2 = 0$ et $f'(-1) = 0$, donc -1 est racine **double** (le maximum local touche l'axe) : $X^3 - 3X - 2 = (X+1)^2(X-2)$. D'où $\{a,b,c\} = \{-1,-1,2\}$.

— Contrôle : $-1-1+2 = 0$; $1-2-2 = -3$; $(-1)(-1)(2) = 2$ ✓.

Réponse. a, b, c racines de $X^3 - 3X - abc$; réels $\Leftrightarrow abc \in [-2,2]$; $abc = 2$: $\{-1,-1,2\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Sommes d'inverses

Ici $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = -3$, $\sigma_3 = -1$ (et $x_i \neq 0$ car $P(0) = 1$).

a) $\sum \frac{1}{x_i} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = 3$. Pour les carrés, on applique l'identité $\sum y_i^2 = \left(\sum y_i\right)^2 - 2\sum_{i<j} y_i y_j$ aux $y_i = \frac{1}{x_i}$, avec $\sum_{i<j} \frac{1}{x_i x_j} = \frac{\sum x_k}{x_1 x_2 x_3} = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = -2$:

$$\sum \frac{1}{x_i^2} = 3^2 - 2 \times (-2) = 13$$

b) $P = \prod (X - x_i)$ donne $\frac{P'(1)}{P(1)} = \sum \frac{1}{1 - x_i}$. Or $P(1) = 1 - 2 - 3 + 1 = -3$ et $P'(1) = 3 - 4 - 3 = -4$:

— $\sum \frac{1}{1 - x_i} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$.

c) $\sum_{i \neq j} \frac{x_i}{x_j} = \sum_j \frac{1}{x_j} \sum_{i \neq j} x_i = \sum_j \frac{\sigma_1 - x_j}{x_j} = \sigma_1 \sum \frac{1}{x_j} - 3 = 2 \times 3 - 3 = 3$.

— Contrôle numérique (racines $\approx -1{,}20$; $0{,}29$; $2{,}91$) : $\sum \frac{1}{x_i} \approx -0{,}83 + 3{,}49 + 0{,}34 = 3{,}00$ ✓.

Réponse. $\sum \frac{1}{x_i} = 3$, $\sum \frac{1}{x_i^2} = 13$, $\sum \frac{1}{1 - x_i} = \frac{4}{3}$, $\sum_{i \neq j} \frac{x_i}{x_j} = 3$.

Correction de l'exercice 11 – L'équation $(z + 1)^n = z^n$

a) $z = 0$ n'est pas solution. Pour $z \neq 0$, l'équation équivaut à $\left(\frac{z+1}{z}\right)^n = 1$, donc $1 + \frac{1}{z} = \omega^k$; le cas $k = 0$ est impossible ($\frac{1}{z} \neq 0$). Donc $z = \frac{1}{\omega^k - 1}$, $1 \leq k \leq n - 1$: $n - 1$ solutions distinctes, autant que le degré de $(z+1)^n - z^n$.

b) Avec $\theta = \frac{2k\pi}{n}$, l'angle moitié donne $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1 = 2\mathrm{i} \sin\frac{\theta}{2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$, donc

$$z_k = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}}{2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}}{2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}} = -\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}$$

— Toutes les solutions ont pour partie réelle $-\frac{1}{2}$: elles sont sur la médiatrice de $[-1, 0]$ (ce qui se voit aussi sur $|z+1| = |z|$).

c) $(z+1)^n - z^n = nz^{n-1} + \binom{n}{2} z^{n-2} + \ldots$, donc $\sum z_k = -\frac{\binom{n}{2}}{n} = -\frac{n-1}{2}$.

— La somme des parties réelles vaut $-\frac{n-1}{2}$: c'est cohérent, et la somme des parties imaginaires $-\frac{1}{2}\sum \operatorname{cotan}\frac{k\pi}{n}$ doit donc être nulle.

Réponse. $z_k = \frac{1}{\omega^k - 1} = -\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{n}$; $\sum z_k = -\frac{n-1}{2}$; $\sum \operatorname{cotan}\frac{k\pi}{n} = 0$.

Correction de l'exercice 12 – Utiliser une racine complexe connue

a) $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$, $(1+\mathrm{i})^3 = 2\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) = -2 + 2\mathrm{i}$, $(1+\mathrm{i})^4 = (2\mathrm{i})^2 = -4$. Donc

— $P(1+\mathrm{i}) = -4 - 2(-2+2\mathrm{i}) + 3(2\mathrm{i}) - 2(1+\mathrm{i}) + 2 = (-4+4-2+2) + \mathrm{i}(-4+6-2) = 0$.

b) P est réel, donc $1 - \mathrm{i} = \overline{1+\mathrm{i}}$ est aussi racine, et

$$(X - 1 - \mathrm{i})(X - 1 + \mathrm{i}) = (X-1)^2 + 1 = X^2 - 2X + 2$$

— divise P dans $\mathbb{R}[X]$.

c) La division donne $P = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 1)$; contrôle :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$X^4-2X^3+2X^2+X^2-2X+2 = X^4-2X^3+3X^2-2X+2$ ✓. Dans $\mathbb{C}[X]$:

— $P=(X-1-\mathrm{i})(X-1+\mathrm{i})(X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})$.

d) Somme : $(1+\mathrm{i})+(1-\mathrm{i})+\mathrm{i}-\mathrm{i}=2=\sigma_1=-\frac{-2}{1}$ ✓. Produit : $|1+\mathrm{i}|^2\times|\mathrm{i}|^2=2=\sigma_4=(-1)^4\frac{2}{1}$ ✓.

Réponse. $P=(X^2-2X+2)(X^2+1)$; racines $1\pm\mathrm{i}$, $\pm\mathrm{i}$.

Correction de l'exercice 13 – Factoriser X⁸ + X⁴ + 1

a) On reconnaît une différence de deux carrés :

$$X^8+X^4+1=(X^4+1)^2-(X^2)^2=(X^4+1-X^2)(X^4+1+X^2)$$

b) $X^4+X^2+1=(X^2+1)^2-X^2=(X^2+X+1)(X^2-X+1)$.

— $X^4-X^2+1=(X^2+1)^2-3X^2=(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)$.

c) Les quatre trinômes ont un discriminant négatif ($1-4$ ou $3-4$) : ils sont irréductibles sur $\mathbb{R}$, et

— $X^8+X^4+1=(X^2+X+1)(X^2-X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)$.

d) $(X^4-1)(X^8+X^4+1)=X^{12}-1$: les racines de X^8+X^4+1 sont les 8 racines 12-ièmes de l'unité qui ne sont pas racines de X^4-1. Chaque trinôme correspond à une paire conjuguée $X^2-2\cos\theta X+1$:

— $\theta=\pm\frac{\pi}{3}$ (X^2-X+1), $\pm\frac{2\pi}{3}$ (X^2+X+1), $\pm\frac{\pi}{6}$ $(X^2-\sqrt{3}X+1)$, $\pm\frac{5\pi}{6}$ $(X^2+\sqrt{3}X+1)$ ✓.

Réponse. $(X^2+X+1)(X^2-X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)$; racines : les $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/6}$ avec k non multiple de 3.

Correction de l'exercice 14 – Une somme sur les racines de l'unité

a) $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=(1-\cos\theta)-\mathrm{i}\sin\theta$, donc

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\frac{(1-\cos\theta)+\mathrm{i}\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=\frac{(1-\cos\theta)+\mathrm{i}\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

— de partie réelle $\frac{1}{2}$.

b) Les termes k et $n-k$ sont conjugués ($\omega^{n-k}=\overline{\omega}^k$) : $S=\overline{S}$ est réel, donc égal à sa partie réelle. Par a), $S=(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{n-1}{2}$.

c) $Q=\prod_{k=1}^{n-1}(X-\omega^k)$, donc $\frac{Q'(1)}{Q(1)}=\sum\frac{1}{1-\omega^k}$. Or $Q(1)=n$ et $Q'(1)=1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$:

— $S=\frac{n(n-1)/2}{n}=\frac{n-1}{2}$ ✓.

d) $n=3$: $\frac{1}{1-j}+\frac{1}{1-j^2}$. Or $(1-j)(1-j^2)=1-j-j^2+1=3$ et $(1-j^2)+(1-j)=3$, donc $S=\frac{3}{3}=1=\frac{3-1}{2}$ ✓.

Réponse. $\mathrm{Re}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\frac{1}{2}$; $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1-\omega^k}=\frac{n-1}{2}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : le polynôme X³ − 3X + 1 et cos(2π/9)

a) Avec $4\cos^3\theta-3\cos\theta=\cos(3\theta)$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P(2\cos\theta) = 8\cos^3\theta - 6\cos\theta + 1 = 2\cos(3\theta) + 1$$

b) $P(2\cos\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(3\theta) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\theta \equiv \pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. Les angles $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{4\pi}{9}$, $\frac{8\pi}{9}$ conviennent ($3 \times \frac{8\pi}{9} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$). Ils sont distincts dans $[0, \pi]$, où cos est injectif :

— les racines $2\cos\frac{2\pi}{9} \approx 1{,}532$, $2\cos\frac{4\pi}{9} \approx 0{,}347$, $2\cos\frac{8\pi}{9} \approx -1{,}879$ sont réelles et distinctes ; ce sont les trois racines de P.

c) $\sigma_1 = 0$ et $\sigma_3 = -1$:

— $\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9} = 0$;

— $8\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9} = -1$, soit un produit égal à $-\frac{1}{8}$.

d) $(2\cos\theta)^2 - 2 = 2\cos(2\theta)$: l'application envoie $2\cos\frac{2\pi}{9} \mapsto 2\cos\frac{4\pi}{9} \mapsto 2\cos\frac{8\pi}{9} \mapsto 2\cos\frac{16\pi}{9} = 2\cos\frac{2\pi}{9}$ ($\cos\frac{16\pi}{9} = \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{9}\right)$).

e) Les seuls candidats rationnels sont ± 1 : $P(1) = -1$ et $P(-1) = 3$. Donc $2\cos\frac{2\pi}{9} \notin \mathbb{Q}$, et $\cos\frac{2\pi}{9}$ est irrationnel ; P, de degré 3 sans racine rationnelle, est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

— **Portée** : ce fait est à la base de l'impossibilité de construire l'angle de $\frac{2\pi}{9}$ (la trisection de $\frac{2\pi}{3}$) à la règle et au compas.

Réponse. Racines $2\cos\frac{2\pi}{9}$, $2\cos\frac{4\pi}{9}$, $2\cos\frac{8\pi}{9}$; somme des cosinus 0, produit $-\frac{1}{8}$; $x \mapsto x^2 - 2$ les permute ; $\cos\frac{2\pi}{9} \notin \mathbb{Q}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).