Plaquette 5 – Arithmétique des polynômes et interpolation de Lagrange

Polynômes — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

L'arithmétique de K[X] copie celle de $\mathbb{Z}$: **algorithme d'Euclide** pour le PGCD, **relation de Bézout** $AU + BV = A \wedge B$, **lemme de Gauss**, décomposition en **irréductibles**. Sur $\mathbb{C}$, tout se lit sur les racines : le PGCD garde les racines communes avec la plus petite multiplicité. L'**interpolation de Lagrange** est l'analogue polynomial du théorème chinois : un polynôme de degré $\leq n$ est déterminé par ses valeurs en $n+1$ points, et la base $(L_0, \dots, L_n)$ l'écrit sans résoudre de système.

Exercice 1 – PGCD par l'algorithme d'Euclide

Soient $A = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ et $B = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$.

a) Calculer $A \wedge B$ par l'algorithme d'Euclide.

b) Vérifier en factorisant A et B (chercher une racine évidente de B).

c) En déduire les racines complexes communes à A et B.

Exercice 2 – Une relation de Bézout

a) Justifier que $(X-1)^2$ et $(X+1)^2$ sont premiers entre eux.

b) Chercher U et V de degré ≤ 1 tels que $(X-1)^2U + (X+1)^2V = 1$ (on pourra remarquer que, par symétrie, on peut prendre $V(X) = U(-X)$).

c) Vérifier le résultat en développant.

d) En déduire la décomposition $\dfrac{1}{(X-1)^2(X+1)^2} = \dfrac{U}{(X+1)^2} + \dfrac{V}{(X-1)^2}$.

Exercice 3 – Bézout et conditions aux racines doubles

On cherche $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(X-1)^2 \mid P+1$ et $(X+1)^2 \mid P-1$.

a) À l'aide de l'exercice précédent, vérifier que $P_0 = -1 + 2(X-1)^2U$ convient, avec $U = \dfrac{X+2}{4}$. Développer P_0.

b) Traduire les conditions en termes de $P(\pm 1)$ et $P'(\pm 1)$, et les vérifier sur P_0.

c) Montrer que les solutions sont exactement les $P_0 + (X-1)^2(X+1)^2T$, $T \in \mathbb{R}[X]$.

d) Interpréter graphiquement P_0.

Exercice 4 – PGCD de $X^m - 1$ et $X^n - 1$

Soient $m, n \geq 1$. On rappelle que le reste de la division de $X^n - 1$ par $X^m - 1$ est $X^r - 1$, où r est le reste de la division de n par m.

a) En suivant l'algorithme d'Euclide en parallèle sur les entiers et sur les polynômes, montrer que $(X^m - 1) \wedge (X^n - 1) = X^{m \wedge n} - 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Retrouver ce résultat par les racines : quelles sont les racines communes à $X^m - 1$ et $X^n - 1$?

c) Calculer $(X^{12} - 1) \wedge (X^{18} - 1)$ et $(X^{12} - 1) \wedge (X^{35} - 1)$.

Exercice 5 – PGCD par les racines

a) Soit $P = (X-1)^3(X+2)^2$. Déterminer $P \wedge P'$ sans calculer P' en entier (utiliser les multiplicités des racines de P').

b) Calculer $(X^4 - 1) \wedge (X^6 - 1)$ par les racines, et vérifier avec l'exercice précédent.

c) Calculer $(X^3 - X) \wedge (X^3 + X^2)$ et le PPCM unitaire correspondant.

Exercice 6 – Irréductibles selon le corps

a) $X^2 - 2$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$? dans $\mathbb{R}[X]$?

b) Montrer que $X^4 + 4 = (X^2 + 2X + 2)(X^2 - 2X + 2)$ (identité de Sophie Germain). Ce polynôme sans racine réelle est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?

c) Montrer que $X^3 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, et le factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

d) Montrer que $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais que $X^4 + 1$ ne l'est pas.

Exercice 7 – Propriétés de la base de Lagrange

Soient $x_0, \dots, x_n$ des réels distincts et $L_0, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés.

a) Montrer que $\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$.

b) Montrer que $\sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i = X^k$ pour $0 \le k \le n$. Que devient cette somme pour $k = n+1$?

c) Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner les coordonnées d'un polynôme P dans cette base.

d) Expliciter L_0, L_1, L_2 pour les points $-1, 0, 1$, et vérifier a).

Exercice 8 – Somme des carrés par interpolation

On note $S(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2$.

a) Calculer $S(0)$, $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$.

b) Déterminer l'unique polynôme P de degré ≤ 3 tel que $P(k) = S(k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3$. On pourra chercher P sous la forme $X(aX^2 + bX + c)$.

c) Montrer que $P(X) - P(X-1) = X^2$, puis que $P(n) = S(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Pourquoi l'interpolation seule ne suffit-elle pas à prouver la formule ?

Exercice 9 – Coefficient dominant de l'interpolation

Soient $x_0, \dots, x_n$ distincts et $P = \sum_i y_i L_i$ le polynôme interpolateur.

a) Montrer que le coefficient de X^n dans P vaut $\sum_{i=0}^{n} \dfrac{y_i}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire, pour $0 \le k \le n$:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x_i^k}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases}$$

c) Vérifier pour les points $0, 1, 2$ avec $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$.

Exercice 10 – Restes chinois pour les polynômes

On cherche $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que le reste de P par $X - 1$ soit 2 et le reste de P par $X^2 + 1$ soit X.

a) Justifier que $X - 1$ et $X^2 + 1$ sont premiers entre eux, et trouver une relation de Bézout entre eux.

b) Trouver l'unique solution P_0 de degré ≤ 2.

c) Décrire toutes les solutions.

d) Faire l'analogie avec le théorème chinois dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 11 – PGCD, PPCM et produit

a) Soient A, B unitaires, $D = A \wedge B$, $A = DA_1$, $B = DB_1$. Montrer que $A_1 \wedge B_1 = 1$ et que $M = DA_1B_1$ est le PPCM de A et B.

b) En déduire $(A \wedge B)(A \vee B) = AB$.

c) Calculer le PPCM de $X^2 - 1$ et $X^2 + X$.

d) Calculer le PPCM de $X^4 - 1$ et $X^6 - 1$, et le développer.

Exercice 12 – Partie sans facteur carré

Soit $P = X^5 - X^4 - 2X^3 + 2X^2 + X - 1$.

a) Vérifier que $P = (X-1)^3(X+1)^2$ (écrire $P = (X-1)(X^2-1)^2$).

b) Calculer P' sous forme factorisée, puis $P \wedge P'$.

c) Calculer $\frac{P}{P \wedge P'}$. Quelles sont ses racines ?

d) Expliquer pourquoi, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, $\frac{P}{P \wedge P'}$ a les mêmes racines que P, mais toutes simples.

Exercice 13 – Résoudre AU + BV = C

On cherche $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X^2+1)U + (X+1)V = X^3$.

a) À partir de $\frac{1}{2}(X^2+1) - \frac{1}{2}(X-1)(X+1) = 1$, donner une solution particulière (U_0, V_0).

b) Montrer que les solutions sont les $\Big(U_0 + (X+1)T,\ V_0 - (X^2+1)T\Big)$, $T \in \mathbb{R}[X]$.

c) Déterminer l'unique solution avec U constant.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Polynômes à valeurs entières

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $H_k = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$ (avec $H_0 = 1$), de sorte que $H_k(n) = \binom{n}{k}$ pour $n \geq k$.

a) Montrer que $H_k(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (traiter $0 \leq n < k$ et $n < 0$).

b) Montrer que $(H_0, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer le polynôme P de degré ≤ 3 tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = 4$, $P(3) = 8$, en l'écrivant dans cette base. Calculer $P(4)$: est-ce 16 ?

d) En déduire qu'un polynôme de degré $\leq n$ qui prend des valeurs entières en $0, 1, \ldots, n$ prend des valeurs entières en tout entier.

Exercice 15 – Synthèse : la méthode de Simpson

Partie A. On interpole aux points -1, 0, 1.

a) Calculer $\int_{-1}^{1} L_i(x)\,\mathrm{d}x$ pour les trois polynômes de Lagrange. En déduire que, pour tout P de degré ≤ 2,

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x = \frac{P(-1) + 4P(0) + P(1)}{3}$$

b) Montrer que la formule reste exacte pour $P = X^3$, donc pour tout P de degré ≤ 3. Est-elle exacte pour X^4 ?

Partie B.

c) Par un changement de variable affine, en déduire pour P de degré ≤ 3 : $\displaystyle\int_a^b P = \frac{b-a}{6}\left[P(a) + 4P\left(\frac{a+b}{2}\right) + P(b)\right]$.

d) Application : approcher $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ par cette formule. Donner l'erreur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).