Plaquette 2 – Degré, division euclidienne et restes

Polynômes — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour obtenir le **reste** de la division de A par B sans poser la division, on écrit $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$ et on **évalue** aux racines de B (en dérivant si une racine est multiple) : les inconnues sont les coefficients de R, en nombre égal à $\deg B$. Pour prouver une divisibilité $B \mid A$, même principe : il suffit que les racines de B, avec leurs multiplicités, soient racines de A. Le **degré** et le **coefficient dominant** donnent souvent, avant tout calcul, la forme de la réponse.

Exercice 1 – Degré d'une différence

a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de $(X+1)^n - (X-1)^n$ pour $n \geq 1$.

b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \geq 1$ et de coefficient dominant a. Montrer que $\Delta P = P(X+1) - P(X)$ est de degré $d-1$, de coefficient dominant da.

c) Déterminer tous les polynômes P tels que $P(X+1) - P(X) = X$ et $P(0) = 0$. En déduire $\sum_{k=0}^{n-1} k$.

d) Déterminer les polynômes P tels que $P(X+1) = P(X)$.

Exercice 2 – Division par un trinôme à paramètres

Soit $A = X^4 + aX^2 + bX + 1$, avec a, b réels.

a) Montrer que $X^3 \equiv 1$ et $X^4 \equiv X$ modulo $X^2 + X + 1$ (c'est-à-dire que les différences sont divisibles par $X^2 + X + 1$).

b) En déduire le reste de la division de A par $X^2 + X + 1$.

c) Pour quelles valeurs de (a, b) la division tombe-t-elle juste ? Donner alors le quotient.

Exercice 3 – Reste par un diviseur scindé

Soit $n \geq 2$.

a) Déterminer le reste de la division de X^n par $X^2 - 3X + 2$. Vérifier pour $n = 2$.

b) Déterminer le reste de la division de X^n par $X^3 - X$.

c) Déterminer le reste de la division de $(X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$ par $(X-3)(X-2)$.

Exercice 4 – Reste modulo X² + 1 et formule de Moivre

a) Justifier que le reste de la division d'un polynôme réel P par $X^2 + 1$ est $\mathrm{Re}P(\mathrm{i}) + X\mathrm{Im}P(\mathrm{i})$.

b) Déterminer le reste de X^{2026}, puis de $X^{2027} + X^{2025}$, par $X^2 + 1$.

c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division de $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par $X^2 + 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Divisibilité par X² + X + 1

a) Soient $p, q, r \in \mathbb{N}$. Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{3p} + X^{3q+1} + X^{3r+2}$.

b) Pour quels entiers n le polynôme $X^2 + X + 1$ divise-t-il $X^{2n} + X^n + 1$?

c) Pour quels entiers n divise-t-il $(X+1)^n - X^n - 1$?

Exercice 6 – Schéma de Horner

Soit $P = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ et α un réel. On définit $b_{n-1} = a_n$ puis $b_{k-1} = a_k + \alpha b_k$ pour $k = n-1, \ldots, 1$, et $r = a_0 + \alpha b_0$.

a) Montrer que $P = (X - \alpha)(b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_0) + r$. Que vaut r ?

b) Appliquer à $P = 2X^4 - 3X^3 + X - 5$ et $\alpha = 2$: quotient et reste.

c) Combien de multiplications le schéma demande-t-il pour calculer $P(\alpha)$? Comparer avec le calcul naïf des puissances.

Exercice 7 – Divisibilité de Xⁿ − 1 par Xᵐ − 1

Soient $m, n \geq 1$, et $n = qm + r$ la division euclidienne des entiers ($0 \leq r < m$).

a) Montrer que $X^m - 1$ divise $X^{qm} - 1$.

b) En déduire que le reste de la division de $X^n - 1$ par $X^m - 1$ est $X^r - 1$.

c) Montrer que $X^m - 1 \mid X^n - 1 \Leftrightarrow m \mid n$.

d) Donner le reste de la division de $X^{10} - 1$ par $X^4 - 1$, et celui de X^{100} par $X^7 - 1$.

Exercice 8 – Unicité de la division et symétries

Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$, $B \neq 0$, et $A = BQ + R$ la division euclidienne.

a) On suppose A et B **pairs** ($A(-X) = A(X)$, de même pour B). Montrer que Q et R sont pairs.

b) Que dire si A est impair et B pair ?

c) Application : sans poser la division, montrer que le reste de $X^6 + 3X^2 + 1$ par $X^2 + 1$ est une constante, et la calculer.

d) Montrer que si $A, B \in \mathbb{Q}[X]$, le quotient et le reste calculés dans $\mathbb{R}[X]$ sont à coefficients rationnels.

Exercice 9 – Polynômes à coefficients entiers

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$.

a) Montrer que $a - b$ divise $P(a) - P(b)$ pour tous entiers $a \neq b$ (factoriser $X^k - b^k$).

b) Existe-t-il $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(1) = 2$ et $P(3) = 5$?

c) On suppose $P(0)$ et $P(1)$ impairs. Montrer que P n'a aucune racine entière.

d) Montrer qu'aucun $P \in \mathbb{Z}[X]$ ne vérifie $P(7) = 5$ et $P(15) = 9$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Degré d'une composée

a) Montrer que $\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q$ lorsque $\deg Q \geq 1$.

b) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P \circ P = X$.

c) Déterminer tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(2X) = 2P(X)$.

d) Déterminer tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = X^2 P(X)$.

Exercice 11 – Reste par $(X-1)^3$ et formule de Taylor

Soit $n \geq 3$.

a) Écrire la formule de Taylor de X^n en 1. En déduire le reste de la division de X^n par $(X-1)^3$.

b) Vérifier le résultat pour $n = 3$.

c) Écrire $P = X^3 - 2X + 1$ selon les puissances de $X - 2$.

Exercice 12 – Reste par $X^2 - 2X\cos\theta + 1$

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $n \geq 1$.

a) Déterminer les racines de $B = X^2 - 2X\cos\theta + 1$.

b) Déterminer le reste de la division de X^n par B.

c) Vérifier le résultat pour $n = 1$ et $n = 2$.

d) Que se passe-t-il pour $\theta = \frac{\pi}{2}$? Comparer avec l'exercice sur $X^2 + 1$.

Exercice 13 – Quotient par $X - a$ et dérivée

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que le quotient de P par $X - a$ est $Q = \sum_{k \geq 1} a_k \left(X^{k-1} + aX^{k-2} + \ldots + a^{k-1} \right)$ si $P = \sum a_k X^k$.

b) En déduire que $Q(a) = P'(a)$. Interpréter : quand a est-il racine double de P ?

c) Application : $P = X^4 - 5X^2 + 4X$ et $a = 1$. Calculer Q et $Q(1)$, et conclure sur la multiplicité de 1.

Exercice 14 – Polynômes et arithmétique des restes

On note $A \equiv B\ [P]$ lorsque P divise $A - B$.

a) Montrer que si $A \equiv A'\ [P]$ et $B \equiv B'\ [P]$, alors $A + B \equiv A' + B'$ et $AB \equiv A'B'\ [P]$.

b) Calculer le reste de $(X^2 + X + 2)^{10}$ par $X^2 + X + 1$.

c) Calculer le reste de $(X+1)^7$ par $X^2 + 1$.

d) Montrer que $X^{2n} + X^n + 1$ n'est jamais divisible par $X^2 - X + 1$ pour n multiple de 6.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : X^n modulo $X^2 - X - 1$ et Fibonacci

On note (F_n) la suite de Fibonacci : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

a) Montrer par récurrence que, pour $n \geq 1$, le reste de la division de X^n par $B = X^2 - X - 1$ est $F_n X + F_{n-1}$.

b) En déduire le reste de X^{10} par B.

c) Soient $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ les racines de B. Montrer que $\varphi^n = F_n \varphi + F_{n-1}$ et en déduire la **formule de Binet** $F_n = \dfrac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$.

d) Montrer que F_n est l'entier le plus proche de $\dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).