Plaquette 1 – Division euclidienne, racines, multiplicité et factorisation

Polynômes — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On effectue des **divisions euclidiennes** de polynômes, on utilise le lien **racine ↔ facteur**, on détecte les **racines multiples** par les dérivées, et on factorise dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 1 – Division euclidienne

Effectuer la division euclidienne de $A = X^4 - 3X^2 + 2X - 1$ par $B = X^2 - X + 1$.

Exercice 2 – Reste sans division

Déterminer le reste de la division de $P = X^{100} + X + 1$ par $X - 1$, puis par $X^2 - 1$.

Exercice 3 – Racine et factorisation

Factoriser $P = X^3 - 4X^2 + X + 6$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 – Racine multiple

Déterminer la multiplicité de la racine 1 dans $P = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$.

Exercice 5 – Factorisation dans C puis dans R

Factoriser $P = X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6 – Polynôme à racines imposées

Déterminer le polynôme P de degré 3 tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 0$, $P(2) = 1$, $P(3) = 10$.

Exercice 7 – Relations coefficients-racines

Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 - 2X^2 + 3X - 4$. Calculer $x_1 + x_2 + x_3$ et $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Exercice 8 – Polynôme et parité

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(-X) = P(X)$.

Exercice 9 – Interpolation de Lagrange

Déterminer le polynôme de degré ≤ 2 prenant les valeurs $P(0) = 1$, $P(1) = 3$, $P(2) = 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Divisibilité et racines communes

Pour quelles valeurs de a le polynôme $X^2 - 1$ divise-t-il $P = X^4 + aX^2 - a - 1$?

Exercice 11 – Polynôme scindé et dérivée

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples, de degré $n \geq 2$. Montrer que P' est scindé.

Exercice 12 – Reste modulo un carré

Soit $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$. Vérifier le résultat pour $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice 13 – Condition de racine double

Déterminer les réels a pour lesquels $P = X^3 - 3X + a$ admet une racine multiple, et factoriser P dans chacun des cas.

Exercice 14 – Factoriser $X^6 - 1$

Factoriser $X^6 - 1$ en produit d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, puis de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 15 – Synthèse : équation fonctionnelle

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).