Plaquette 3 – Racines, multiplicités et polynômes scindés

Polynômes — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Une **racine** a de P se lit de trois façons équivalentes : $P(a) = 0$, $(X - a) \mid P$, ou un facteur dans la factorisation. Sa **multiplicité** se détecte par les dérivées successives (formule de Taylor). Deux principes font le reste : un polynôme non nul de degré n a **au plus** n **racines** (donc un polynôme qui s'annule sur un ensemble infini est nul), et, sur $\mathbb{R}$, le **théorème de Rolle** place une racine de P' entre deux racines de P.

Exercice 1 – Une racine triple

Soit $n \geq 2$ et $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$.

a) Calculer $P(1)$, $P'(1)$ et $P''(1)$.

b) Montrer que $P'''(1) = 2n(n-1)(n+1)$. Quelle est la multiplicité de 1 ?

c) Vérifier le résultat pour $n = 2$ en factorisant P.

d) Montrer que -1 est aussi racine de P lorsque n est pair. Avec quelle multiplicité pour $n = 2$?

Exercice 2 – Une racine double et son quotient

Soit $n \geq 1$ et $P_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.

a) Montrer que 1 est racine double de P_n.

b) En dérivant $S = 1 + X + \ldots + X^n$, montrer que $P_n = (X-1)^2 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k$.

c) Vérifier pour $n = 1$ et $n = 2$.

d) En déduire que $P_n(x) > 0$ pour tout réel $x > 0$, $x \neq 1$.

Exercice 3 – Racines simples de $X^n + X + 1$

Soit $n \geq 2$ et $P = X^n + X + 1$.

a) Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine multiple de P. Montrer que $nz^{n-1} = -1$, puis que $z = -\frac{n}{n-1}$.

b) En comparant les modules dans $z^{n-1} = -\frac{1}{n}$, aboutir à une contradiction.

c) Conclure : combien P a-t-il de racines complexes distinctes ?

d) Même question pour $X^3 - 3X + 2$: l'argument tombe-t-il en défaut ? Pourquoi ?

Exercice 4 – Un polynôme qui s'annule trop est nul

a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. Montrer que $P = 0$.

b) Montrer que deux polynômes qui coïncident sur $\mathbb{N}$ sont égaux.

c) Montrer qu'aucun polynôme ne vérifie $P(x) = |x|$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

d) Montrer que les fonctions sin et exp ne sont pas polynomiales sur $\mathbb{R}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Racines rationnelles

Soit $P = a_n X^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$, avec $a_n a_0 \neq 0$.

a) Montrer que si $\frac{p}{q}$ (fraction irréductible) est racine de P, alors $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.

b) Factoriser $2X^3 - X^2 + 2X - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

c) Montrer que $X^3 - X - 1$ n'a aucune racine rationnelle, puis qu'il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

d) En déduire que $\sqrt[3]{2}$ est irrationnel.

Exercice 6 – Rolle et nombre de racines réelles

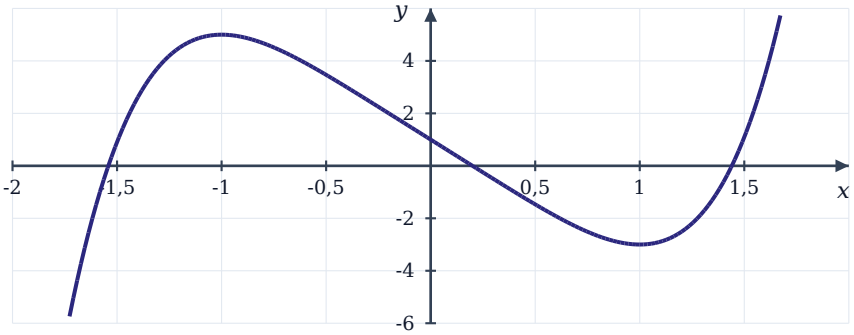
Soit $P = X^5 - 5X + 1$.

a) Étudier les variations de la fonction polynomiale P sur $\mathbb{R}$ (figure).

b) En déduire que P a exactement trois racines réelles, et les localiser entre deux entiers consécutifs.

c) Montrer plus généralement que si P' a k racines réelles distinctes, alors P a au plus $k+1$ racines réelles distinctes.

d) Combien P a-t-il de racines non réelles ? Sont-elles conjuguées ?



La courbe de $x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $[-2, 2]$.

Exercice 7 – Interpolation d'Hermite

a) Déterminer l'unique polynôme P de degré ≤ 3 tel que $P(0) = 0$, $P'(0) = 1$, $P(1) = 1$, $P'(1) = 0$.

b) Justifier l'unicité en considérant la différence de deux solutions.

c) Interpréter graphiquement : raccord entre la droite $y = x$ et la droite $y = 1$.

d) Montrer qu'il n'existe pas de polynôme de degré ≤ 2 vérifiant ces quatre conditions.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Les polynômes de Tchebychev

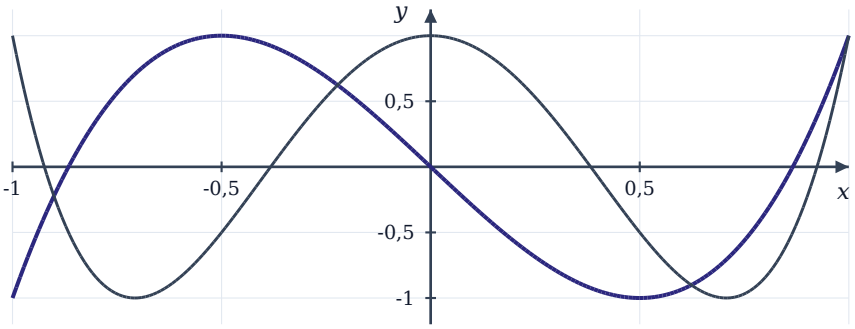
On définit $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$.

a) Calculer T_2, T_3, T_4.

b) Montrer par récurrence que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout réel θ (utiliser $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos\theta\cos(n\theta)$).

c) Montrer que T_n est de degré n, de coefficient dominant 2^{n-1} ($n \geq 1$), et qu'il est l'**unique** polynôme vérifiant b).

d) Déterminer les n racines de T_n ; en déduire que T_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, toutes dans $]-1, 1[$. Vérifier sur T_3.



T_3 (en couleur) et T_4 oscillent entre -1 et 1 sur $[-1, 1]$.

Exercice 9 – Polynômes positifs sur R

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $P(x) \geq 0$ pour tout réel x.

a) Montrer que le coefficient dominant de P est positif et que ses racines réelles sont de multiplicité **paire**.

b) En écrivant la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, montrer que $P = c\,Q\overline{Q}\,R^2$ avec $c > 0$, $R \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ (où $\overline{Q}$ a les coefficients conjugués).

c) En écrivant $Q = A + \mathrm{i}B$ avec A, B réels, en déduire que P est **somme de deux carrés** de polynômes réels.

d) Application : écrire $X^4 + 1$ et $X^2 - 2X + 5$ comme sommes de deux carrés.

Exercice 10 – Les polynômes divisibles par leur dérivée

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ tel que $P' \mid P$.

a) Montrer que $P = \frac{1}{n}(X - a)P'$ pour un certain $a \in \mathbb{C}$.

b) Soit z une racine de P, de multiplicité m. En comparant les multiplicités de z dans P et dans $(X - a)P'$, montrer que $z = a$.

c) En déduire que $P = c(X - a)^n$ avec $c \neq 0$. Vérifier la réciproque.

d) Déterminer les $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tels que $P' \mid P$ et $P(0) = 0$, $P(1) = 8$.

Exercice 11 – Racine commune à deux trinômes

Soit $a \in \mathbb{R}$, $P = X^2 + aX + 1$ et $Q = X^2 + X + a$.

a) Montrer qu'une racine commune z (complexe) vérifie $(a - 1)(z - 1) = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire les valeurs de a pour lesquelles P et Q ont une racine commune, et préciser ces racines.

c) Dans chaque cas, donner le plus grand diviseur commun unitaire de P et Q.

Exercice 12 – Trois racines réelles : une condition nécessaire

Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ à coefficients réels, de racines complexes x_1, x_2, x_3.

a) Exprimer $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ et $\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2$ en fonction de a et b.

b) En déduire que si les trois racines sont réelles, alors $a^2 \geq 3b$, avec égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = x_3$.

c) Application : $X^3 + X^2 + X + 1$ a-t-il trois racines réelles ? Vérifier en le factorisant.

d) La condition $a^2 \geq 3b$ est-elle suffisante ? (Étudier $X^3 + 1$.)

Exercice 13 – Points fixes d'un polynôme itéré

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 2.

a) Montrer que $X - Y$ divise $P(X) - P(Y)$ (au sens : $P(X) - P(Y) = (X - Y)S(X, Y)$ avec S polynomial), puis que $P(P(X)) - P(X)$ est divisible par $P(X) - X$.

b) En déduire que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

c) Application : $P = X^2 - 2$. Calculer $P \circ P - X$ et le factoriser dans $\mathbb{R}[X]$.

d) Interpréter les racines du second facteur : que fait P sur elles ?

Exercice 14 – Racine double de $(X + 1)^n - X^n - 1$

Soit $n \geq 2$ et $P_n = (X + 1)^n - X^n - 1$. On admet que $j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$ est racine de P_n si et seulement si $n \equiv \pm 1 \pmod 6$.

a) Rappeler pourquoi $j + 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$.

b) Montrer que j est racine au moins double de P_n si et seulement si $n \equiv 1 \pmod 6$.

c) Vérifier que $P_7 = 7X(X + 1)(X^2 + X + 1)^2$ (développer, ou comparer degrés, racines et coefficients dominants).

Exercice 15 – Synthèse : dérivée logarithmique d'un polynôme scindé

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé, $P = c\prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$ (racines répétées selon leur multiplicité).

a) Montrer que $P' = \sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(X - x_j) \times c$, puis que $\dfrac{P'(a)}{P(a)} = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a - x_i}$ pour a non racine.

b) Application : calculer $\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{2 - \omega^k}$, où $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$. Vérifier pour $n = 2$.

c) On suppose $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que, sur tout intervalle sans racine, la fonction $\dfrac{P'}{P}$ est strictement décroissante, et en déduire l'inégalité de Laguerre $P'(x)^2 \geq P(x)P''(x)$ pour tout réel x.

d) Vérifier c) sur $P = X^2 - 1$, puis montrer que $X^2 + 1$ ne la vérifie pas partout.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).