Plaquette 4 – Relations coefficients-racines et factorisations

Polynômes — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Les **relations coefficients-racines** permettent de calculer toute expression **symétrique** des racines ($\sum x_i^2$, $\sum \frac{1}{x_i}$, $\prod x_i$…) sans connaître les racines, et, en sens inverse, de trouver des nombres dont on connaît la somme, les produits deux à deux et le produit. Pour **factoriser** dans $\mathbb{R}[X]$, on factorise d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ (racines de l'unité, forme trigonométrique), puis on regroupe les racines conjuguées : $(X-z)(X-\overline{z}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(z)X + |z|^2$.

Exercice 1 – Sommes de puissances des racines

Soient x_1, x_2, x_3 les racines complexes de $P = X^3 - 2X + 5$.

a) Donner σ_1, σ_2, σ_3.

b) Calculer $s_1 = \sum x_i$, $s_2 = \sum x_i^2$ et $\sum \frac{1}{x_i}$.

c) En utilisant $x_i^3 = 2x_i - 5$, calculer $s_3 = \sum x_i^3$ et $s_4 = \sum x_i^4$.

d) Combien P a-t-il de racines réelles ? Justifier à l'aide de s_2 et d'une étude de fonction.

Exercice 2 – Un système symétrique

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système

$$x + y + z = 2, \qquad xy + yz + zx = -1, \qquad xyz = -2$$

a) Montrer que x, y, z sont les racines d'un polynôme de degré 3 que l'on précisera.

b) Factoriser ce polynôme et conclure.

c) Combien le système a-t-il de solutions (triplets ordonnés) ?

d) Même méthode pour $x + y = 5$, $xy = 7$: les solutions sont-elles réelles ?

Exercice 3 – Racines en progression arithmétique

Soit $P = X^3 - 9X^2 + aX - 15$, $a \in \mathbb{R}$.

a) On suppose que les racines de P s'écrivent $m - r$, m, $m + r$. Déterminer m.

b) En déduire a, puis les racines.

c) Réciproquement, vérifier que pour cette valeur de a les racines sont bien en progression arithmétique.

d) Généraliser : à quelle condition sur (p, q, s) le polynôme $X^3 - pX^2 + qX - s$ a-t-il ses racines en progression arithmétique ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Racines en progression géométrique

Soit $P = X^3 - 7X^2 + bX - 8$, $b \in \mathbb{R}$.

a) On suppose que les racines réelles de P s'écrivent $\frac{m}{r}$, m, mr avec m, r réels non nuls. Déterminer m.

b) En déduire b et les racines.

c) Montrer plus généralement que si $X^3 - pX^2 + qX - s$ ($s \neq 0$) a ses racines en progression géométrique, alors $q^3 = p^3 s$. Vérifier sur b).

Exercice 5 – Produit de sinus

Soit $n \geq 2$ et $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$.

a) Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega^k) = 1 + X + \ldots + X^{n-1}$.

b) En déduire $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = n$.

c) Montrer que $|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$, puis que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

d) Vérifier pour $n = 3$ et $n = 4$.

Exercice 6 – Valeur exacte de cos(2π/5)

a) Factoriser $X^5 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ sous la forme $(X-1)(X^2 - aX + 1)(X^2 - bX + 1)$ avec $a = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $b = 2\cos\frac{4\pi}{5}$.

b) En identifiant avec $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, montrer que $a + b = -1$ et $ab = -1$.

c) En déduire $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

d) Application : exprimer le côté d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1.

Exercice 7 – Sommes sur les racines de l'unité

Soit $n \geq 2$ et $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$.

a) Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ vaut n si $n \mid p$ et 0 sinon.

b) En déduire les sommes de Newton $s_p = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^k)^p$ des racines de $X^n - 1$. Retrouver s_1 par les relations coefficients-racines.

c) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n$.

d) Montrer que $\sum_{p \equiv 0\ (3)} \binom{n}{p} = \frac{2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}}{3}$, et vérifier pour $n = 6$.

Exercice 8 – Polynôme dont les racines sont les carrés

Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $P = X^3 - X - 1$.

a) Calculer $\sigma_1' = \sum x_i^2$, $\sigma_2' = \sum_{i<j} x_i^2 x_j^2$ et $\sigma_3' = x_1^2 x_2^2 x_3^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire un polynôme unitaire Q de degré 3 dont les racines sont x_1^2, x_2^2, x_3^2.

c) Retrouver Q directement : si $x^3 = x + 1$, calculer $x^2(x^2-1)^2$.

d) Même question pour le polynôme dont les racines sont les $\frac{1}{x_i}$.

Exercice 9 – Trois réels de somme nulle

On cherche les réels a, b, c tels que $a+b+c = 0$ et $ab+bc+ca = -3$.

a) Montrer que a, b, c sont les racines de $X^3 - 3X - p$, où $p = abc$.

b) Étudier $f : x \mapsto x^3 - 3x - p$ et montrer que ses trois racines sont réelles si et seulement si $-2 \leq p \leq 2$.

c) En déduire l'ensemble des valeurs possibles du produit abc.

d) Donner a, b, c lorsque $abc = 2$.

Exercice 10 – Sommes d'inverses

Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $P = X^3 - 2X^2 - 3X + 1$.

a) Calculer $\sum \frac{1}{x_i}$ et $\sum \frac{1}{x_i^2}$.

b) Calculer $\sum \frac{1}{1-x_i}$ en utilisant $\frac{P'}{P}$.

c) Calculer $\sum_{i \neq j} \frac{x_i}{x_j}$.

Exercice 11 – L'équation $(z+1)^n = z^n$

Soit $n \geq 2$.

a) Montrer que les solutions de $(z+1)^n = z^n$ sont les $z_k = \frac{1}{\omega^k - 1}$, $1 \leq k \leq n-1$, avec $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$.

b) Montrer que $z_k = -\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{n}$. Que dire des parties réelles ?

c) Calculer la somme des z_k par les relations coefficients-racines, et en déduire $\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{cotan}\frac{k\pi}{n} = 0$.

Exercice 12 – Utiliser une racine complexe connue

Soit $P = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 2$.

a) Vérifier que $1 + \mathrm{i}$ est racine de P.

b) En déduire, sans nouveau calcul de racine, un facteur de degré 2 de P dans $\mathbb{R}[X]$.

c) Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

d) Vérifier la somme et le produit des quatre racines par les relations coefficients-racines.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Factoriser X⁸ + X⁴ + 1

a) Montrer que $X^8+X^4+1=(X^4+X^2+1)(X^4-X^2+1)$ (écrire $X^8+X^4+1=(X^4+1)^2-X^4$).

b) Factoriser de même X^4+X^2+1 et X^4-X^2+1 en produits de trinômes réels.

c) En déduire la factorisation de X^8+X^4+1 en irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

d) Retrouver les racines complexes : montrer que ce sont les racines 12-ièmes de l'unité qui ne sont pas racines quatrièmes de l'unité.

Exercice 14 – Une somme sur les racines de l'unité

Soit $n\geq 2$ et $\omega=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$.

a) Montrer que pour $\theta\notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\mathrm{Re}\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\dfrac{1}{2}$.

b) En déduire $S=\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{1-\omega^k}$ (justifier d'abord que S est réel).

c) Retrouver S avec $Q=1+X+\ldots+X^{n-1}$ et la formule $\dfrac{Q'(1)}{Q(1)}=\sum\dfrac{1}{1-\omega^k}$.

d) Vérifier pour $n=3$.

Exercice 15 – Synthèse : le polynôme X³ − 3X + 1 et cos(2π/9)

Soit $P=X^3-3X+1$.

a) Montrer que $P(2\cos\theta)=2\cos(3\theta)+1$.

b) En déduire les trois racines de P sous la forme $2\cos\theta$; montrer qu'elles sont réelles et distinctes.

c) Par les relations coefficients-racines, calculer $\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}$ et $\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}$.

d) Montrer que $x\mapsto x^2-2$ permute circulairement les racines de P.

e) Montrer que P n'a aucune racine rationnelle. En déduire que $\cos\frac{2\pi}{9}$ est irrationnel.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).