Plaquette 4 – Fonctions définies par une intégrale et suites d'intégrales

Primitives et intégrales — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dérivée d'une intégrale à bornes variables (f continue, u, v dérivables) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

— **Théorème fondamental** : $x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f nulle en a.

— **Encadrement** : si $m \leq f \leq M$ sur $[a,b]$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

— **Monotonie de** (I_n) : comparer f_{n+1} et f_n sur l'intervalle.

— **Équivalent** : si I_n décroît et $I_n + I_{n+1} \sim \frac{1}{n}$, alors $I_n \sim \frac{1}{2n}$.

— **Wallis** : $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.

Correction de l'exercice 1 – Une intégrale entre x et 2x

a) $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$: elle a une primitive Φ, et $F(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$ est dérivable :

$$F'(x) = 2\mathrm{e}^{-4x^2} - \mathrm{e}^{-x^2}$$

b) Changement $t = -s$: $F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s = -F(x)$: F est **impaire**.

— $F'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq \mathrm{e}^{3x^2} \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{\ln 2}{3}$. Sur $\mathbb{R}_+$, F croît sur $[0, x_0]$ puis décroît, avec $x_0 = \sqrt{\frac{\ln 2}{3}} \approx 0{,}481$.

c) Pour $x \geq 0$ et $t \in [x, 2x]$: $0 \leq \mathrm{e}^{-t^2} \leq \mathrm{e}^{-x^2}$, et l'intervalle a pour longueur x. Donc $0 \leq F(x) \leq x\mathrm{e}^{-x^2} \to 0$ (croissances comparées) : $F(x) \to 0$ en $+\infty$.

Réponse. $F'(x) = 2\mathrm{e}^{-4x^2} - \mathrm{e}^{-x^2}$; F impaire, maximale en $\sqrt{\ln 2\,/\,3}$, de limite 0 en $+\infty$.

Correction de l'exercice 2 – Intégrale de 1/ln t entre x et x²

a) Avec la formule de dérivation à bornes variables :

$$G'(x) = \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{2x}{2\ln x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x} > 0$$

— G est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

b) Pour $t \in [x, x^2]$, $x \leq t \leq x^2$ et $\frac{1}{t\ln t} > 0$, donc $\frac{x}{t\ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t\ln t}$. Or $\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = [\ln(\ln t)]_x^{x^2} = \ln\frac{2\ln x}{\ln x} = \ln 2$.

c) Gendarmes : $G(x) \to \ln 2$ quand $x \to 1^+$; minoration par $x\ln 2$: $G(x) \to +\infty$.

d) $2\ln 2 \approx 1{,}386 \leq 1{,}922 \leq 4\ln 2 \approx 2{,}773$ ✓.

Réponse. $G'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$; $G(x) \to \ln 2$ en 1^+ et $+\infty$ en $+\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Comportement asymptotique par parties

a) $u' = \mathrm{e}^t$, $v = \frac{1}{t}$, $v' = -\frac{1}{t^2}$:

$$\Phi(x) = \left[\frac{\mathrm{e}^t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \mathrm{e} + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

b) Pour $x \geq 2$: sur $\left[1, \frac{x}{2}\right]$, $\frac{\mathrm{e}^t}{t^2} \leq \mathrm{e}^{x/2}$, d'où une contribution $\leq \frac{x}{2}\mathrm{e}^{x/2}$. Sur $\left[\frac{x}{2}, x\right]$, $\frac{\mathrm{e}^t}{t^2} \leq \frac{4}{x^2}\mathrm{e}^t$, d'où $\leq \frac{4\mathrm{e}^x}{x^2}$. En divisant par $\frac{\mathrm{e}^x}{x}$: $\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-x/2} + \frac{4}{x} \to 0$.

c) $\Phi(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x} + o\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)$ (le terme $-\mathrm{e}$ est aussi négligeable) : $\Phi(x) \sim \frac{\mathrm{e}^x}{x}$.

d) Rapport 1,13 en $x = 10$, puis 1,06 en $x = 20$: il tend vers 1, lentement ; une seconde IPP montrerait que $\Phi(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}\left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

Réponse. $\Phi(x) \sim \frac{\mathrm{e}^x}{x}$ en $+\infty$.

Correction de l'exercice 4 – Moyenne des distances à un point

a) Si $x \leq 0$: $|t - x| = t - x$ et $f(x) = \frac{1}{2} - x$. Si $x \geq 1$: $f(x) = x - \frac{1}{2}$. Si $0 \leq x \leq 1$, par Chasles :

$$f(x) = \int_0^x (x - t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 (t - x)\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} + \frac{(1-x)^2}{2} = x^2 - x + \frac{1}{2}$$

b) Aux raccords : en 0, les deux formules valent $\frac{1}{2}$ et leurs dérivées valent -1 (-1 et $2x - 1 = -1$) ; en 1, valeurs $\frac{1}{2}$ et dérivées 1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) Sur $[0, 1]$, $x^2 - x + \frac{1}{2} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$: minimum $\frac{1}{4}$ en $x = \frac{1}{2}$, et $f \geq \frac{1}{2}$ ailleurs. Le point qui minimise la distance moyenne à $[0, 1]$ est son **milieu** (plus généralement, c'est la **médiane**).

Réponse. $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$ sur $[0, 1]$, $|x - \frac{1}{2}|$ ailleurs ; minimum $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 5 – Équations intégrales

Clé : si f est continue, $x \mapsto \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ (avec g continue) est de classe C^1. L'équation exprime donc f comme une fonction **dérivable** : on peut dériver.

a) f est dérivable et $f' = f$, avec $f(0) = 1 + 0 = 1$. Les solutions de $y' = y$ sont $C\mathrm{e}^x$: $f(x) = \mathrm{e}^x$. **Réciproque** : $1 + \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 1 + \mathrm{e}^x - 1 = \mathrm{e}^x$ ✓.

b) $f' = 2xf$, $f(0) = 1$. On résout l'équation linéaire :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$$

— Réciproque : $1 + \int_0^x 2t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1 + \mathrm{e}^{x^2} - 1$ ✓.

c) En dérivant (théorème fondamental) : $f(x) = 2x + \cos x$. Réciproque : $\int_0^x (2t + \cos t)\,\mathrm{d}t = x^2 + \sin x$ ✓ (les deux membres sont nuls en 0 : c'est indispensable).

Réponse. a) e^x · b) e^{x^2} · c) $2x + \cos x$.

Correction de l'exercice 6 – Équivalent d'une suite d'intégrales

a) $I_0 = \ln 2$. En additionnant les intégrandes :

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $x^{n+1} \le x^n$ sur $[0,1]$: $I_{n+1} \le I_n$. Et $0 \le I_n \le \int_0^1 x^n = \frac{1}{n+1} \to 0$.

c) Par décroissance : $2I_{n+1} \le I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1} \le 2I_n$. La première inégalité, au rang $n-1$, donne $2I_n \le \frac{1}{n}$. D'où l'encadrement, et les deux bornes sont équivalentes à $\frac{1}{2n}$.

d) $\frac{1}{20} = 0{,}05$ et $\frac{1}{22} \approx 0{,}0455$ encadrent $0{,}04751$ ✓ ; $\frac{1}{200} = 0{,}005$ contre $0{,}004975$ ✓.

Réponse. $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, $I_n \sim \frac{1}{2n}$.

Correction de l'exercice 7 – Équivalent des intégrales de Wallis

a) $0 \le \cos x \le 1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\cos^{n+1} \le \cos^n$, donc $W_{n+1} \le W_n$; $W_n > 0$ (intégrande continue, positive, non nulle).

b) Posons $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Avec la relation au rang $n+2$:

$$u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1} = u_n$$

— et $u_0 = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$.

c) Décroissance : $W_{n+2} \le W_{n+1} \le W_n$, donc $\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \le \frac{W_{n+1}}{W_n} \le 1$. Gendarmes : $\frac{W_{n+1}}{W_n} \to 1$.

d) $\frac{\pi}{2} = (n+1)W_{n+1}W_n \sim nW_n^2$, donc $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ et $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. $n = 10$: $\sqrt{\pi/20} \approx 0{,}3963$ contre $0{,}3866$ (écart $2{,}5\,\%$) ; $n = 100$: $0{,}12533$ contre $0{,}12502$ ($0{,}25\,\%$).

Réponse. $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$ et $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Correction de l'exercice 8 – Une récurrence numériquement instable

a) $I_0 = 1 - \mathrm{e}^{-1}$. IPP ($u' = \mathrm{e}^{-x}$, $v = x^n$) :

$$I_n = [-x^n\mathrm{e}^{-x}]_0^1 + n\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\mathrm{e}} + nI_{n-1}$$

b) $0 \le x^n\mathrm{e}^{-x} \le x^n$ sur $[0,1]$.

c) Une erreur ε sur I_0 devient $n!\,\varepsilon$ sur I_n (chaque pas la multiplie par n). Avec $\varepsilon \approx 10^{-16}$ et $20! \approx 2{,}4 \times 10^{18}$, l'erreur atteint une centaine : le résultat -82 n'a aucun sens (en réalité $I_{20} \approx 0{,}0184$, et b) impose $0 \le I_{20} \le \frac{1}{21}$).

d) À rebours, $I_{n-1} = \frac{I_n + 1/\mathrm{e}}{n}$ **divise** l'erreur par n. En partant de $I_{40} \approx 0$ (erreur $\le \frac{1}{41}$), l'erreur sur I_{20} est au plus $\frac{1}{41} \cdot \frac{20!}{40!}$, soit de l'ordre de 10^{-31} : excellent.

Réponse. $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{\mathrm{e}}$ amplifie les erreurs d'un facteur $n!$; à rebours, elle les divise.

Correction de l'exercice 9 – Primitive d'une fonction périodique

a) $F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f$, et l'intégrale d'une fonction T-périodique sur une période ne dépend pas de l'origine (dériver par rapport à x donne $f(x+T) - f(x) = 0$).

b) Conséquence immédiate de a).

c) $\cos^2$ est π-périodique et $\int_0^\pi \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ (linéarisation). Condition :

$$\int_0^\pi (\cos^2 t - a)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - a\pi = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

— Et en effet $\int_0^x \left(\cos^2 t - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\sin 2x}{4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) $G(x) = F(x) - \mu x$ vérifie $G(x+T) - G(x) = \int_0^T f - \mu T = 0$. La primitive d'une fonction périodique est la somme d'une fonction **affine** (pente = valeur moyenne) et d'une fonction **périodique**.

Réponse. F périodique si et seulement si $\int_0^T f = 0$; c) $a = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 10 – Le logarithme défini par une intégrale

a) $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$: L est sa primitive nulle en 1, et $L'(x) = \frac{1}{x} > 0$.

b) Par Chasles puis changement de variable $t = yu$ ($\mathrm{d}t = y\,\mathrm{d}u$) dans la seconde intégrale :

$$L(xy) = \int_1^y \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_y^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = L(y) + \int_1^x \frac{y\,\mathrm{d}u}{yu} = L(y) + L(x)$$

c) Pour $x \geq 1$: $\frac{1}{t} \leq 1$ sur $[1, x]$, donc $L(x) \leq x - 1$. Pour $0 < x < 1$: $\frac{1}{t} \geq 1$ sur $[x, 1]$, donc $-L(x) = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} \geq 1 - x$, soit encore $L(x) \leq x - 1$.

d) Par récurrence avec b), $L(2^n) = nL(2)$, et $L(2) > 0$ (croissance stricte). Donc $L(2^n) \to +\infty$: L n'est pas majorée, et, croissante, tend vers $+\infty$. On retrouve toutes les propriétés de ln.

Réponse. $L(xy) = L(x) + L(y)$, $L(x) \leq x - 1$, $L \to +\infty$: $L = \ln$.

Correction de l'exercice 11 – Arctangente et symétrie t ↦ 1/t

a) $t = \frac{1}{u}$, $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$, bornes $1 \to 1$ et $x \to \frac{1}{x}$:

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{-\mathrm{d}u\,/\,u^2}{1 + 1\,/\,u^2} = \int_{1/x}^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}$$

b) Le membre de gauche vaut $\arctan x - \frac{\pi}{4}$, celui de droite $\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{x}$. D'où $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

c) $\frac{1}{1+x^2} + \frac{-1\,/\,x^2}{1 + 1\,/\,x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$: la fonction est constante sur $]0, +\infty[$, égale à sa valeur en 1, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$.

d) Par imparité de arctan : $-\frac{\pi}{2}$. (La fonction est constante sur chacun des deux intervalles, mais pas sur $\mathbb{R}^*$, qui n'est pas un intervalle.)

Réponse. $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ si $x > 0$, $-\frac{\pi}{2}$ si $x < 0$.

Correction de l'exercice 12 – Intégrer deux fois

a) Attention : x n'est pas la variable d'intégration, on peut le sortir. Avec le théorème fondamental et la dérivée d'un produit :

$$F'(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

— donc $F''(x) = f(x)$, continue : F est C^2. Et $F(0) = 0$, $F'(0) = 0$.

b) Si y est une autre solution, $z = y - F$ vérifie $z'' = 0$, $z(0) = z'(0) = 0$, donc $z = 0$. La solution est F.

c) $x(t) = \int_0^t (t-s)\sin s\,\mathrm{d}s$. Par parties : $[-(t-s)\cos s]_0^t - \int_0^t \cos s\,\mathrm{d}s = t - \sin t$. Vérification : $x'(t) = 1 - \cos t$, $x''(t) = \sin t$, $x(0) = x'(0) = 0$ ✓. C'est la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1.

Réponse. $F'' = f$; pour $a(t) = \sin t$, $x(t) = t - \sin t$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – Moyenne à l'infini

a) Soit $\varepsilon > 0$ et A comme indiqué. Pour $x > A$:

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f - \ell\right| \le \frac{1}{x}\int_0^A |f-\ell| + \frac{1}{x}\int_A^x |f-\ell| \le \frac{C_A}{x} + \varepsilon$$

— où $C_A = \int_0^A |f-\ell|$ ne dépend pas de x. Pour x assez grand, $\frac{C_A}{x} \le \varepsilon$, et l'écart est $\le 2\varepsilon$. C'est le **théorème de Césaro** version continue.

b) $\arctan t \to \frac{\pi}{2}$: limite $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}5708$. À $x = 100$, 1,5147 : l'écart 0,056 vient de ce que arctan est loin de $\frac{\pi}{2}$ au début ; il décroît comme $\frac{\ln x}{x}$.

c) $\frac{1}{x}\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{\sin x}{x} \to 0$, mais cos n'a pas de limite en $+\infty$.

Réponse. $\frac{1}{x}\int_0^x f \to \ell$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) cos : moyenne $\to 0$ sans limite.

Correction de l'exercice 14 – Une intégrale qui a une limite finie

a) $H'(x) = \dfrac{1}{1+x^3} > 0$.

b) $H(x) = H(1) + \int_1^x \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$ avec $H(1) \le 1$ (intégrande ≤ 1 sur $[0,1]$) et

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} \le \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \le \frac{1}{2}$$

c) H croissante et majorée par $\frac{3}{2}$ sur $[1, +\infty[$: elle a une limite finie $\ell \le \frac{3}{2}$ (théorème de la limite monotone pour les fonctions).

d) Pour $y > x$: $H(y) - H(x) = \int_x^y \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} \le \int_x^y \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \le \frac{1}{2x^2}$; on fait $y \to +\infty$. Précision 10^{-4} : $\frac{1}{2x^2} \le 10^{-4} \Leftrightarrow x \ge \sqrt{5000} \approx 70{,}7$.

Réponse. H croissante majorée, $\ell = \lim H \le \frac{3}{2}$; $0 \le \ell - H(x) \le \frac{1}{2x^2}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la fonction sinus intégral

a) $\frac{\sin t}{t} \to 1$ en 0 : le prolongement est continu, et Si est sa primitive nulle en 0, $\mathrm{Si}'(x) = \frac{\sin x}{x}$.

b) Sur $]0, +\infty[$, Si′ a le signe de $\sin x$: croissante sur $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, décroissante sur $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$. **Maxima** locaux en $(2k+1)\pi$, **minima** en $2k\pi$ ($k \ge 1$). Le maximum global est $\mathrm{Si}(\pi) \approx 1{,}852$.

c) On divise l'encadrement par $t > 0$ et l'on intègre sur $[0, \pi]$:

$$\int_0^\pi \left(1 - \frac{t^2}{6}\right)\mathrm{d}t \le \mathrm{Si}(\pi) \le \int_0^\pi 1\,\mathrm{d}t$$

— soit $\pi - \frac{\pi^3}{18} \approx 1{,}419 \le \mathrm{Si}(\pi) \le \pi$.

d) $a_{k+1} = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u+\pi}\,\mathrm{d}u \le a_k$, et $a_k \le \frac{2}{k\pi} \to 0$. Les aires des arches alternent de signe et décroissent : $\mathrm{Si}(x)$ oscille autour de sa limite $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}571$ avec une amplitude qui diminue, comme les sommes partielles d'une série alternée.

Réponse. $\mathrm{Si}' = \frac{\sin x}{x}$; maxima en $(2k+1)\pi$; $1{,}419 \le \mathrm{Si}(\pi) \le \pi$; oscillations amorties vers $\frac{\pi}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).