Plaquette 3 – Propriétés de l'intégrale, inégalités et formules de Taylor

Primitives et intégrales — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Taylor avec reste intégral : si f est de classe C^{n+1} sur $[a,x]$,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

— **Inégalité de Taylor-Lagrange** : $\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right|\le\frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ où $M=\sup|f^{(n+1)}|$.

— **Positivité stricte** : f **continue**, $f\ge 0$ et $\int_a^b f=0$ $(a<b)\Rightarrow f=0$ sur $[a,b]$.

— **Cauchy-Schwarz** : $\left(\int_a^b fg\right)^2\le\int_a^b f^2\int_a^b g^2$.

— **Inégalité triangulaire** : $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|$ $(a\le b)$.

— **Formule de la moyenne** : f, g continues, $g\ge 0$: il existe $c\in[a,b]$ tel que $\int_a^b fg=f(c)\int_a^b g$.

Correction de l'exercice 1 – Positivité stricte

a) Si $f(x_0)>0$, par continuité il existe un segment $[\alpha,\beta]\ni x_0$ de longueur $\delta>0$ où $f\ge\frac{f(x_0)}{2}$. Alors, f étant positive :

$$\int_a^b f\ge\int_\alpha^\beta f\ge\delta\cdot\frac{f(x_0)}{2}>0$$

— contradiction. Donc $f=0$.

b) $f=0$ sauf $f(0)=1$ sur $[0,1]$: positive, d'intégrale nulle, non nulle.

c) On développe le carré : $\int_0^1(f(x)-x)^2\,\mathrm{d}x=\int f^2-2\int xf+\int x^2=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=0$. La fonction $(f-x)^2$ est continue et positive : elle est nulle par a), donc $f(x)=x$.

d) On choisit $g=f$: $\int_a^b f^2=0$ avec f^2 continue positive, donc $f^2=0$ et $f=0$.

Réponse. Continue, positive, d'intégrale nulle ⇒ nulle ; c) $f(x)=x$; d) $g=f$.

Correction de l'exercice 2 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

a) Par linéarité, $P(\lambda)=\int f^2+2\lambda\int fg+\lambda^2\int g^2$, et $P(\lambda)\ge 0$ comme intégrale d'une fonction positive (bornes croissantes).

b) Si $\int g^2>0$, P est un trinôme positif : son discriminant est négatif,

$$4\left(\int_a^b fg\right)^2-4\int_a^b f^2\int_a^b g^2\le 0$$

— Si $\int g^2=0$, alors $g=0$ (positivité stricte) et l'inégalité est $0\le 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) On applique b) à $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$, continues : $\left(\int_a^b 1\right)^2 \le \int_a^b f \int_a^b \frac{1}{f}$.

d) $\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$ et $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln 2$: produit $\frac{3}{2}\ln 2 \approx 1{,}040 \ge 1$ ✓. Écart faible : f varie peu (l'égalité a lieu si et seulement si f est constante).

Réponse. $\left(\int fg\right)^2 \le \int f^2 \int g^2$; $\int f \int \frac{1}{f} \ge (b-a)^2$, ici $1{,}040 \ge 1$.

Correction de l'exercice 3 – Encadrer une intégrale non calculable

a) $\mathrm{e}^{-u} \ge 1-u$: convexité de l'exponentielle (courbe au-dessus de sa tangente en 0). Et $\mathrm{e}^{u} \ge 1+u > 0$, donc en inversant, $\mathrm{e}^{-u} \le \frac{1}{1+u}$.

b) Avec $u = x^2$ puis croissance de l'intégrale sur $[0,1]$:

$$\int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x \le G \le \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

— soit $\frac{2}{3} \le G \le \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

c) $0{,}6667 \le G \le 0{,}7854$: le centre 0,726 est à 0,06 près. (Valeur réelle : $G \approx 0{,}7468$.) Pour faire mieux, on utiliserait plus de termes du développement de e^{-u}.

Réponse. $\frac{2}{3} \le G \le \frac{\pi}{4}$, soit $G \approx 0{,}73 \pm 0{,}06$.

Correction de l'exercice 4 – Intégrales de $x^n f(x)$

a) $|x^n f(x)| \le M x^n$ et l'inégalité triangulaire donnent

$$|u_n| \le \int_0^1 M x^n\,\mathrm{d}x = \frac{M}{n+1} \to 0$$

b) $u' = x^n$, $v = f$: $u_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} f(x)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1} f'(x)\,\mathrm{d}x$, puis on multiplie par $n+1$.

c) Par a) appliqué à f' (continue), l'intégrale restante tend vers 0 : $(n+1)u_n \to f(1)$. Et $n u_n = (n+1)u_n - u_n \to f(1) - 0$.

d) $f(1) = \mathrm{e} \approx 2{,}718$: 2,280 puis 2,665 ($n = 100$) puis 2,713. Convergence en $\frac{1}{n}$: la masse de x^n se concentre près de 1, où f vaut $f(1)$.

Réponse. $u_n \to 0$ et $n u_n \to f(1)$; pour e^x, $n u_n \to \mathrm{e}$.

Correction de l'exercice 5 – Limite d'une suite d'intégrales

a) $J_1 = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2 \approx 0{,}693$; $J_2 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$.

b) On écrit $1 - \frac{1}{1+x^n} = \frac{x^n}{1+x^n}$ et l'on encadre :

$$0 \le \frac{x^n}{1+x^n} \le x^n \quad\Longrightarrow\quad 0 \le 1 - J_n \le \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

c) Gendarmes : $J_n \to 1$.

d) $1 - J_5 \approx 0{,}112 \le \frac{1}{6} \approx 0{,}167$ ✓ ; $1 - J_{10} \approx 0{,}062 \le \frac{1}{11} \approx 0{,}091$ ✓. La majoration est du bon ordre : on montrerait que $1 - J_n \sim \frac{\ln 2}{n}$.

Réponse. $0 \le 1 - J_n \le \frac{1}{n+1}$, donc $J_n \to 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Lemme de Riemann-Lebesgue

a) $u' = \sin \lambda t$, $u = -\frac{\cos \lambda t}{\lambda}$, $v = f$:

$$\int_a^b f(t) \sin \lambda t \, \mathrm{d}t = \left[-\frac{f(t) \cos \lambda t}{\lambda} \right]_a^b + \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \cos \lambda t \, \mathrm{d}t$$

— Le crochet est majoré par $\frac{|f(a)| + |f(b)|}{\lambda}$, l'intégrale par $\frac{(b-a) \sup |f'|}{\lambda}$: le tout tend vers 0.

b) $f(t) = \frac{1}{1+t}$ est C^1 sur $[0, \pi]$: limite 0.

c) Même IPP : $\left[-\frac{t \cos nt}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nt \, \mathrm{d}t = -\frac{\pi (-1)^n}{n} + 0 = \frac{(-1)^{n+1} \pi}{n} \to 0$.

d) Quand λ est grand, $\sin \lambda t$ oscille très vite : sur chaque période, f est presque constante et les arches positives et négatives se compensent.

Réponse. $\int_a^b f(t) \sin \lambda t \, \mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \to 0$; $\int_0^{\pi} t \sin nt = \frac{(-1)^{n+1} \pi}{n}$.

Correction de l'exercice 7 – Formule de la moyenne

a) $mg \le fg \le Mg$ car $g \ge 0$; en intégrant, $m \int g \le \int fg \le M \int g$. Si $\int g = 0$, tout c convient (fg est alors d'intégrale nulle aussi). Sinon

$$m \le \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \le M$$

— et le théorème des valeurs intermédiaires fournit c avec $f(c)$ égal à ce quotient.

b) Avec $g = 1$: $\frac{1}{x} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} \, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{c_x^2}$, $c_x \in [0, x]$. Quand $x \to 0$, $c_x \to 0$ et la limite est $\mathrm{e}^0 = 1$.

c) $f = \cos$, $g(t) = t \ge 0$: $\int_0^x t \cos t \, \mathrm{d}t = \cos(c_x) \frac{x^2}{2}$, donc la limite est $\frac{1}{2}$. (Numériquement, pour $x = 0{,}01$: 0,49999.)

Réponse. b) 1 · c) $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 8 – Taylor avec reste intégral

a) On part de $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) \, \mathrm{d}t$ et l'on intègre par parties avec $u(t) = -(x-t)$ (dérivée 1), $v = f'$:

$$\int_a^x f'(t) \, \mathrm{d}t = [-(x-t) f'(t)]_a^x + \int_a^x (x-t) f''(t) \, \mathrm{d}t = (x-a) f'(a) + \int_a^x (x-t) f''(t) \, \mathrm{d}t$$

b) Toutes les dérivées de exp valent 1 en 0 : $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$. Le reste est > 0 (intégrande continue positive non nulle) et

— majoré par $\mathrm{e} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}$.

c) Il suffit que $\frac{3}{(n+1)!} \le 10^{-6}$: $9! = 362\,880$ ne suffit pas, $10! = 3\,628\,800$ convient. Donc $n = 9$, soit **10 termes** ($k = 0$ à 9). L'erreur réelle est 3×10^{-7}.

Réponse. $0 < \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \le \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}$; 10 termes pour 10^{-6}.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Irrationalité de e

a) $q!\,\mathrm{e} = (q-1)!\,p \in \mathbb{N}$ et $q!\,S_q = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}$ est une somme d'entiers. A est une différence d'entiers.

b) On multiplie l'encadrement par $q! > 0$:

$$0 < A = q!\,(\mathrm{e} - S_q) \leq \frac{q!\,\mathrm{e}}{(q+1)!} = \frac{\mathrm{e}}{q+1}$$

c) Quitte à écrire $\frac{p}{q} = \frac{2p}{2q}$, on peut supposer $q \geq 2$. Alors $\frac{\mathrm{e}}{q+1} \leq \frac{\mathrm{e}}{3} < 1$ (car $\mathrm{e} < 3$), et A serait un entier strictement compris entre 0 et 1 : c'est impossible. Donc e est **irrationnel**.

— Le point clé est la **vitesse** de convergence : l'erreur $\frac{\mathrm{e}}{(q+1)!}$ est si petite qu'elle devient invisible après multiplication par $q!$.

Réponse. A serait un entier de $]0,1[$: $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$.

Correction de l'exercice 10 – Inégalité de Taylor-Lagrange pour sinus

a) sin est C^∞ ; en 0, ses dérivées valent $0, 1, 0, -1, 0$ pour les ordres 0 à 4. Taylor-Lagrange à l'ordre 4 (le terme de degré 4 est nul), avec $|\sin^{(5)}| = |\cos| \leq 1$:

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right| \leq \frac{|x|^5}{5!} = \frac{|x|^5}{120}$$

b) $0{,}5 - \frac{0{,}125}{6} \approx 0{,}4791667$, erreur garantie $\leq \frac{0{,}5^5}{120} \approx 2{,}6 \times 10^{-4}$. Erreur réelle : $2{,}59 \times 10^{-4}$, presque égale à la borne.

c) $\frac{a^5}{120} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow a^5 \leq 0{,}012 \Leftrightarrow a \leq 0{,}012^{1/5} \approx 0{,}413$.

Réponse. $\sin 0{,}5 \approx 0{,}47917$ à $2{,}6 \times 10^{-4}$ près ; précision 10^{-4} garantie sur $[-0{,}41; 0{,}41]$.

Correction de l'exercice 11 – Développer ln 2 par une intégrale

a) Somme géométrique de raison $-t \neq 1$: $\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$, d'où la formule.

b) On intègre de 0 à 1 ; $\int_0^1 (-t)^k\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^k}{k+1}$, et en réindexant :

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

— Le reste vérifie $0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$.

c) Le reste tend vers 0 : la somme converge vers $\ln 2$. Pour $n = 10$: $|0{,}6931 - 0{,}6456| \approx 0{,}048 \leq \frac{1}{11} \approx 0{,}091$ ✓. Convergence lente, en $\frac{1}{n}$.

Réponse. $\ln 2 = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, avec un reste $\leq \frac{1}{n+1}$.

Correction de l'exercice 12 – La série de Leibniz pour π

a) $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n-1} (-t^2)^k + \frac{(-t^2)^n}{1+t^2}$ (somme géométrique de raison $-t^2$). On intègre sur $[0,1]$, avec $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ et $\int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2k+1}$.

b) On encadre l'intégrande du reste :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$0 \le \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+1}$$

c) L'erreur sur π est au plus $\frac{4}{2n+1}$: $\frac{4}{2n+1} \le 10^{-3} \Leftrightarrow 2n+1 \ge 4000$, soit $n = 2000$ termes. C'est très lent : on préfère en pratique des formules comme celle de Machin, $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$, où les puissances de $\frac{1}{5}$ font converger très vite.

Réponse. $\frac{\pi}{4} = \sum_{k\ge 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$; 2000 termes pour π à 10^{-3}.

Correction de l'exercice 13 – Intégrale d'une fonction périodique

a) Avec F une primitive de f, $\varphi(a) = F(a+T) - F(a)$, dérivable, et

$$\varphi'(a) = f(a+T) - f(a) = 0$$

— φ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

b) $|\sin|$ est π-périodique ; sur $[0,\pi]$, $\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t = 2$. Par Chasles et a), $\int_0^{n\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = 2n$.

c) Pour $n\pi \le x < (n+1)\pi$ ($n = \lfloor x/\pi \rfloor$), la positivité donne $2n \le \int_0^x |\sin| \le 2(n+1)$, donc

— $\frac{2n}{(n+1)\pi} \le \frac{1}{x}\int_0^x |\sin t|\,\mathrm{d}t \le \frac{2(n+1)}{n\pi}$. Les deux bornes tendent vers $\frac{2}{\pi}$: c'est la **valeur moyenne** de $|\sin|$ sur une période.

Réponse. $\int_0^{n\pi} |\sin| = 2n$; moyenne asymptotique $\frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$.

Correction de l'exercice 14 – Aires entre deux courbes

L'aire entre deux courbes est l'intégrale de la **différence** (courbe du dessus moins courbe du dessous) :

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \quad \text{si } f \ge g \text{ sur } [a,b]$$

a) Sur $[0,1]$, $x^2 \le \sqrt{x}$ (élever au carré : $x^4 \le x$). Aire : $\left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (unité d'aire).

b) Sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$, $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \ge 0$. Aire :

— $[-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{5\pi/4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$.

c) Justifications données en a) et b) ; oublier l'ordre donne un résultat négatif ou, pire, des aires qui se compensent.

Réponse. a) $\frac{1}{3}$ · b) $2\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : l'inégalité d'Hermite-Hadamard

a) f convexe est au-dessus de sa tangente en m : $f(x) \ge f(m) + f'(m)(x-m)$. On intègre ; $\int_a^b (x-m)\,\mathrm{d}x = 0$ par symétrie, d'où $\int_a^b f \ge (b-a)f(m)$.

b) f est sous sa corde : $f(x) \le f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. On intègre ; la moyenne de la fonction affine est la moyenne de ses valeurs extrêmes :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

c) $\frac{1}{x}$ est convexe sur $[1,2]$: $\frac{1}{3/2} \le \ln 2 \le \frac{1+\frac{1}{2}}{2}$, soit $\frac{2}{3} \approx 0{,}667 \le \ln 2 \le \frac{3}{4} = 0{,}75$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Sur $[1, \frac{3}{2}]$: $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} \le \int \le \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\frac{2}{3}}{2}$; sur $[\frac{3}{2}, 2]$: $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7} \le \int \le \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{2}$. En sommant : $\frac{2}{5}+\frac{2}{7} = \frac{24}{35} \approx 0{,}686 \le \ln 2 \le \frac{5}{12}+\frac{7}{24} = \frac{17}{24} \approx 0{,}708$. ($\ln 2 \approx 0{,}693$.) Ce sont les méthodes du **point milieu** et des **trapèzes**.

Réponse. $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$; $\frac{24}{35} \le \ln 2 \le \frac{17}{24}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).