Plaquette 1 – Primitives usuelles, intégration par parties et changement de variable

Primitives et intégrales — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Primitives usuelles (à C près, sur tout intervalle où les expressions ont un sens).

$$\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ (\alpha \neq -1) \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| \qquad \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x \qquad \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \qquad \int \tan x \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|$$

Formes composées : $\int u' u^\alpha = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$, $\int u' \mathrm{e}^u = \mathrm{e}^u$, $\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$.

Théorèmes.

- **Théorème fondamental** : si f est continue sur I et $a \in I$, alors $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est **dérivable** de dérivée f.
- **Intégration par parties** : $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$.
- **Changement de variable** : $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$.
- **Positivité et croissance** : $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$; $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$ (pour $a \leq b$).
- **Inégalité de la moyenne** : $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \leq (b-a)\sup_{[a;b]}|f|$.
- **Valeur moyenne** : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- **Sommes de Riemann** : $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$.

Correction de l’exercice 1 – Primitives immédiates

- a) On intègre terme à terme : $F(x) = x^3 - 2\ln x$ (on peut omettre la valeur absolue car $x > 0$).
- b) C’est une forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + 1 > 0$: $G(x) = \ln(x^2+1)$.
- c) On reconnaît $\frac{1}{2}u'\mathrm{e}^u$ avec $u = x^2$, $u' = 2x$: $H(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$.
- **Contrôle systématique** : on dérive. $H'(x) = \frac{1}{2} \times 2x\,\mathrm{e}^{x^2} = x\mathrm{e}^{x^2}$. Cohérent.

Réponse. a) $x^3 - 2\ln x$ · b) $\ln(x^2+1)$ · c) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$.

Correction de l’exercice 2 – Intégration par parties (logarithme)

On pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$, donc $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

$$I = [x\ln x]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [x\ln x]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 1\,\mathrm{d}x$$

- Premier crochet : $\mathrm{e}\ln\mathrm{e} - 1 \times \ln 1 = \mathrm{e}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Seconde intégrale : $[x]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - 1$.
— Donc $I = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1$.
— **Vérification** : une primitive de ln est $x\ln x - x$; en e elle vaut 0, en 1 elle vaut -1, différence 1. Cohérent.

Réponse. $I = 1$.

Correction de l'exercice 3 – Double intégration par parties

Première IPP : $u' = \mathrm{e}^x$, $v = x^2$, donc $u = \mathrm{e}^x$, $v' = 2x$.

$$J = [x^2\mathrm{e}^x]_0^1 - 2\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2K$$

Deuxième IPP pour $K = \int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$: $u' = \mathrm{e}^x$, $v = x$.

— $K = [x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1$.
— Donc $J = \mathrm{e} - 2 \approx 0{,}718$.
— **Contrôle d'ordre de grandeur** : sur $[0\,;1]$, $x^2\mathrm{e}^x \leq \mathrm{e} \approx 2{,}72$ et la fonction est petite près de 0 ; une valeur voisine de 0,7 est plausible.
— **Règle** : chaque IPP abaisse de 1 le degré du polynôme. Pour $x^n\mathrm{e}^x$, il faut n IPP.

Réponse. $J = \mathrm{e} - 2 \approx 0{,}718$.

Correction de l'exercice 4 – Changement de variable affine

On pose $u = 2x + 1$, donc $\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{2}$.

— **Bornes** : $x = 0 \Rightarrow u = 1$; $x = 1 \Rightarrow u = 3$.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^3} = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{\mathrm{d}u}{u^3} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2u^2}\right]_1^3$$

— Calcul du crochet : $-\dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{-1+9}{18} = \dfrac{8}{18} = \dfrac{4}{9}$.
— Donc l'intégrale vaut $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{9} = \dfrac{2}{9} \approx 0{,}222$.
— **Ne jamais oublier de changer les bornes** quand on change de variable dans une intégrale définie.

Réponse. $\dfrac{2}{9}$.

Correction de l'exercice 5 – Changement de variable trigonométrique

On pose $x = \sin t$ avec $t \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$.

— Sur cet intervalle $\cos t \geq 0$, donc $\sqrt{1 - \sin^2 t} = |\cos t| = \cos t$.
— **Bornes** : $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

— **Linéarisation** : $\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}$, d'où

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \frac{\pi}{4}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Interprétation géométrique** : c'est l'aire du **quart de disque** de rayon 1, soit $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$. Cohérent.

Réponse. $\frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 6 – Fraction rationnelle

Décomposition en éléments simples : $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ et

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

— Contrôle de la décomposition : $\frac{(x+1)-(x-1)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{2}{2(x^2-1)}$. Cohérent.

— Primitive sur $]1\,;+\infty[$: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

— Évaluation : $\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4} - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

— Valeur numérique : $\frac{1}{2} \times 0{,}4055 \approx 0{,}203$.

— **Contrôle** : sur $[2\,;3]$, $\frac{1}{x^2-1}$ varie entre $\frac{1}{8} = 0{,}125$ et $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$; une intégrale de 0,20 sur un intervalle de longueur 1 est plausible.

Réponse. $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} \approx 0{,}203$.

Correction de l'exercice 7 – Intégrale et parité

— a) $x \mapsto x^3$ est **impaire** et l'intervalle est symétrique : l'intégrale est **nulle**.

— b) sin est impaire, cos est paire, donc $x \mapsto \sin(x)\mathrm{e}^{\cos x}$ est **impaire** : l'intégrale sur $[-\pi\,;\pi]$ est **nulle**.

— **Justification** : pour f impaire, $\int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{0} f + \int_{0}^{a} f$, et le changement $x \mapsto -x$ montre que les deux morceaux sont opposés.

— **À l'inverse**, pour f **paire** : $\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f$.

— **Réflexe d'examen** : avant tout calcul, vérifier la parité — cela fait gagner un temps considérable.

Réponse. a) 0 · b) 0 (intégrandes impaires).

Correction de l'exercice 8 – Inégalité intégrale

Encadrement de l'intégrande : pour $x \in [0\,;1]$, on a $1 \leq 1 + x^2 \leq 2$, donc

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

— Par **croissance de l'intégrale** sur $[0\,;1]$ (longueur 1) : $\frac{1}{2} \leq I \leq 1$.

— **Valeur exacte** : une primitive de $\frac{1}{1+x^2}$ est arctan, donc

$$I = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

— $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$, qui est bien dans $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$. Cohérent.

— **Méthode générale** : encadrer l'intégrande puis intégrer est la manière la plus rapide d'obtenir un ordre de grandeur, y compris quand l'intégrale n'est pas calculable.

Réponse. $I = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Valeur moyenne

Par définition, $\mu = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x$.

— $\int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$.

— Donc $\mu = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$.

— **Contrôle de vraisemblance** : sin vaut entre 0 et 1 sur $[0\,;\pi]$, avec un maximum de 1 ; une moyenne d'environ 0,64 est cohérente (plus que 0,5 car la courbe est « bombée »).

— **Application physique** : c'est la valeur moyenne d'un courant sinusoïdal redressé demi-onde, un résultat classique en électricité.

Réponse. $\mu = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$.

Correction de l'exercice 10 – Somme de Riemann

On reconnaît une **somme de Riemann** sur $[0\,;1]$.

— Posons $f(x) = \frac{1}{1+x}$, continue sur $[0\,;1]$. La somme s'écrit $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

— Le pas est $\frac{1}{n} = \frac{b-a}{n}$ avec $a = 0$, $b = 1$; les points $\frac{k}{n}$ subdivisent $[0\,;1]$.

— Donc la limite vaut $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$.

— Valeur numérique : $\ln 2 \approx 0{,}693$.

— **Contrôle** pour $n = 10$: la somme vaut $\approx 0{,}669$, ce qui converge bien vers $\ln 2$ (par valeurs inférieures, car f est décroissante).

Réponse. $\ln 2 \approx 0{,}693$.

Correction de l'exercice 11 – Fonction définie par une intégrale

a) $t \mapsto \frac{1}{1+t^4}$ est **continue** sur $\mathbb{R}$ (dénominateur jamais nul).

— Le **théorème fondamental** donne : F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \frac{1}{1+x^4}$.

b) - **Monotonie** : $F'(x) > 0$ pour tout x, donc F est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

— **Parité** : l'intégrande est **paire**. Le changement $t = -u$ donne $F(-x) = \int_0^{-x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = -\int_0^{x} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = -F(x)$.

— F est donc **impaire** : primitive nulle en 0 d'une fonction paire.

— **À retenir** : la primitive s'annulant en 0 d'une fonction paire est impaire, et réciproquement.

Réponse. a) $F'(x) = \frac{1}{1+x^4}$ · b) F impaire et strictement croissante.

Correction de l'exercice 12 – Trinôme sans racine au dénominateur

Le discriminant $4 - 20 = -16$ est négatif : pas de décomposition réelle. On passe par la **forme canonique** :

$$x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 = 4\left(1 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right)$$

— Changement de variable $u = \frac{x+1}{2}$, $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}u$; bornes : $x = -1 \Rightarrow u = 0$, $x = 1 \Rightarrow u = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— L'intégrale devient $\int_0^1 \frac{2\,du}{4(1+u^2)} = \frac{1}{2}[\arctan u]_0^1 = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$.

— Valeur numérique : $\frac{\pi}{8} \approx 0{,}393$. **Contrôle** : l'intégrande vaut $\frac{1}{4}$ en -1 et $\frac{1}{8}$ en 1 ; sur un intervalle de longueur 2, une intégrale proche de 0,39 est plausible.

— **Formule à retenir** : $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\arctan\frac{x-\alpha}{\beta}$.

Réponse. $\frac{\pi}{8} \approx 0{,}393$.

Correction de l'exercice 13 – Intégration par parties (arctangente)

Comme pour ln, on fait apparaître un facteur 1 : $u' = 1$, $v = \arctan x$, donc $u = x$ et $v' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$K = [x\arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

— Crochet : $1\times\arctan 1 - 0 = \frac{\pi}{4}$.

— La seconde intégrale est une forme $\frac{1}{2}\cdot\frac{u'}{u}$ avec $u = 1+x^2$: $\frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$.

— Donc $K = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \approx 0{,}785 - 0{,}347 = 0{,}439$.

— **Primitive** : le même calcul entre 0 et x donne $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Contrôle en dérivant : $\arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \arctan x$.

Réponse. $K = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \approx 0{,}439$; primitive $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Correction de l'exercice 14 – Changement de variable exponentiel

$t = e^x$ est une bijection C^1 croissante ; $dt = e^x\,dx$, soit $dx = \frac{dt}{t}$. Bornes : $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \ln 2 \Rightarrow t = 2$.

$$L = \int_1^2 \frac{dt}{t(1+t)} = \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)dt$$

— Décomposition vérifiée : $\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} = \frac{1+t-t}{t(1+t)}$.

— $L = [\ln t - \ln(1+t)]_1^2 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{4}{3} \approx 0{,}288$.

— **Autre méthode** : $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$, qui s'intègre directement en $x - \ln(1+e^x)$: on retrouve $\ln 2 - \ln 3 + \ln 2 = \ln\frac{4}{3}$.

Réponse. $L = \ln\frac{4}{3} \approx 0{,}288$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : intégrale de Wallis

a) - $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$.

— $I_1 = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$.

b) On écrit $\cos^n x = \cos^{n-1}x \times \cos x$ et on pose $u' = \cos x$, $v = \cos^{n-1}x$.

— Alors $u = \sin x$ et $v' = -(n-1)\cos^{n-2}x\sin x$.

$$I_n = [\sin x\cos^{n-1}x]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos^{n-2}x\,dx$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Le crochet est **nul** ($\sin 0 = 0$ et $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, avec $n \geq 2$).

— On remplace $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

— D'où $I_n + (n-1)I_n = (n-1)I_{n-2}$, c'est-à-dire $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

c) On applique la relation deux fois.

— $n = 2$: $2I_2 = I_0 = \frac{\pi}{2}$, donc $I_2 = \frac{\pi}{4}$.

— $n = 4$: $4I_4 = 3I_2 = \frac{3\pi}{4}$, donc $I_4 = \frac{3\pi}{16} \approx 0{,}589$.

— **Contrôle** : $I_4 < I_2 \approx 0{,}785 < I_0 \approx 1{,}571$, la suite est bien décroissante puisque $\cos^n x \leq \cos^{n-1} x$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Réponse. a) $\frac{\pi}{2}$ et 1 · c) $I_4 = \frac{3\pi}{16} \approx 0{,}589$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).