Plaquette 5 – Sommes de Riemann, calcul approché et applications

Primitives et intégrales — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Sommes de Riemann : si f est continue sur $[a,b]$,

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a+k\frac{b-a}{n}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

- **Rectangles**, f de classe C^1 : erreur $\leq \frac{(b-a)^2}{2n}\sup|f'|$.
- **Trapèzes**, f de classe C^2 : $T_n = h\Big(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\Big)$, erreur $\leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}\sup|f''|$.
- **Valeur moyenne** $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$; **valeur efficace** $\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2}$.
- **Longueur** de la courbe $y=f(x)$: $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$; **volume** par tranches : $\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.
- **Densité** de probabilité : $f\geq 0$, $\int f = 1$; $P(X\in[c,d]) = \int_c^d f$; $E(X) = \int x f(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître une somme de Riemann

Méthode : factoriser par n au dénominateur pour faire apparaître $\frac{k}{n}$, puis appliquer

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \quad (f \text{ continue})$$

a) $\frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(k/n)^2}$: limite $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854$.

b) $\frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\cdot\frac{k/n}{1+(k/n)^2}$: limite $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{2} \approx 0{,}3466$.

c) $\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2k/n}}$: limite $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x}} = \big[\sqrt{1+2x}\big]_0^1 = \sqrt{3}-1 \approx 0{,}7321$.

Les valeurs numériques en sont proches, à environ $\frac{1}{n}$ près ✓ (la somme commence à $k=1$: c'est la méthode des rectangles à droite).

Réponse. a) $\frac{\pi}{4}$ · b) $\frac{\ln 2}{2}$ · c) $\sqrt{3}-1$.

Correction de l'exercice 2 – Limite d'un produit

a) $\ln P_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\Big(1+\frac{k}{n}\Big)$, somme de Riemann de $x\mapsto \ln(1+x)$, continue sur $[0,1]$.

b) $u'=1$ (primitive $1+x$, choix astucieux), $v=\ln(1+x)$:

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = \big[(1+x)\ln(1+x)\big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$$

c) $\ln P_n \to 2\ln 2 - 1$ et, par continuité de exp, $P_n \to \mathrm{e}^{2\ln 2-1} = \frac{4}{\mathrm{e}} \approx 1{,}4715$ ✓.

d) $\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{k}{n}\Big) = \prod_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n^n}$. Donc $\frac{1}{n}\Big(\frac{(2n)!}{n!}\Big)^{1/n} = P_n \to \frac{4}{\mathrm{e}}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $P_n \to \frac{4}{\mathrm{e}}$; même limite pour $\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n}$.

Correction de l'exercice 3 – Factorielle et somme de Riemann

a) $\frac{n!}{n^n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n}$; on prend le logarithme et on divise par n.

b) ln est croissante. Sur $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $\ln x \le \ln \frac{k}{n}$; sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $\ln x \ge \ln \frac{k}{n}$. En intégrant sur ces intervalles de longueur $\frac{1}{n}$:

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} \ln x \,\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}\ln\frac{k}{n} \le \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln x \,\mathrm{d}x$$

— On somme pour k de 2 à n : les intégrales se recollent par Chasles.

c) Une primitive de ln est $x\ln x - x$, qui tend vers 0 en 0^+ (croissances comparées) et vaut -1 en 1. Les deux bornes tendent donc vers $\int_0^1 \ln = -1$:

— $\int_{1/n}^{1} \ln = -1 - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \to -1$, et de même pour la borne de droite.

— Le terme $k=1$, $\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} = -\frac{\ln n}{n}$, tend vers 0.

— Donc $\ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to -1$ et $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{\mathrm{e}}$: on retrouve, par une autre voie, le résultat du critère du quotient.

Réponse. $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{\mathrm{e}}$ (car $\int_0^1 \ln = -1$).

Correction de l'exercice 4 – Méthode des rectangles

a) Par l'inégalité des accroissements finis, $|f(t) - f(a+kh)| \le M_1(t - a - kh)$. On intègre sur l'intervalle de longueur h :

$$\left|\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} (f(t) - f(a+kh))\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^h M_1 s \,\mathrm{d}s = \frac{M_1 h^2}{2}$$

b) On somme les n erreurs (inégalité triangulaire) : $n \cdot \frac{M_1 h^2}{2} = \frac{M_1 (b-a)^2}{2n}$.

c) $R_{10} = \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9} \mathrm{e}^{k/10} = \frac{1}{10}\cdot\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^{0{,}1}-1} \approx 1{,}63380$. Valeur exacte $\mathrm{e}-1 \approx 1{,}71828$: erreur 0,0845. Borne : $M_1 = \mathrm{e}$, $\frac{\mathrm{e}}{20} \approx 0{,}136$ ✓. La méthode est d'ordre 1 : pour diviser l'erreur par 10, il faut 10 fois plus de points.

Réponse. Erreur $\le \frac{M_1(b-a)^2}{2n}$; $R_{10} \approx 1{,}6338$ pour $\mathrm{e}-1 \approx 1{,}7183$.

Correction de l'exercice 5 – Méthode des trapèzes à la main

a) $h = \frac{1}{4}$, points $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2$:

$$T_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2} + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7}\right) = \frac{1171}{1680} \approx 0{,}697024$$

b) Erreur réelle : $0{,}697024 - 0{,}693147 \approx 0{,}0039$. Borne : $f''(x) = \frac{2}{x^3} \le 2$ sur $[1,2]$, donc $\frac{2}{12\times 16} = \frac{1}{96} \approx 0{,}0104$ ✓.

c) $\frac{2}{12n^2} \le 10^{-6} \Leftrightarrow n^2 \ge \frac{10^6}{6} \Leftrightarrow n \ge 408{,}3$: $n = 409$ trapèzes.

d) Par **excès** : $\frac{1}{x}$ est convexe, donc chaque corde est au-dessus de la courbe et chaque

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

trapèze a une aire supérieure à celle sous la courbe.

Réponse. $T_4 = \frac{1171}{1680} \approx 0{,}6970$ (excès, erreur $0{,}004 \le \frac{1}{96}$) ; 409 trapèzes pour 10^{-6}.

Correction de l'exercice 6 – Programmer les trapèzes

a) $\int_0^1 \frac{4\,dx}{1+x^2} = 4\arctan 1 = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$.

b) Script :

```
from math import pi

def trapezes(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = (f(a) + f(b)) / 2
    for k in range(1, n):
        s = s + f(a + k * h)
    return h * s

f = lambda x: 4 / (1 + x**2)
for n in [10, 100, 1000]:
    v = trapezes(f, 0, 1, n)
    print(n, round(v, 9), v - pi)
```

— Sorties : 3,139925989 (erreur $-1{,}67 \times 10^{-3}$) ; 3,141575987 ($-1{,}67 \times 10^{-5}$) ; 3,141592487 ($-1{,}67 \times 10^{-7}$).

c) L'erreur est divisée par 100 quand n est multiplié par 10 : elle est en $\frac{C}{n^2}$, conforme à la majoration

$$\left| \int_a^b f - T_n \right| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup |f''|$$

— Plus précisément, $T_n - \pi \approx \frac{f(1)-f(0)}{12n^2} = \frac{-2-0}{12n^2} = -\frac{1}{6n^2}$ (premier terme de la formule d'Euler-Maclaurin), ce que confirment les sorties.

Réponse. Erreur $\approx -\frac{1}{6n^2}$: $1{,}67 \times 10^{-3}$, 10^{-5}, 10^{-7} pour $n = 10, 100, 1000$.

Correction de l'exercice 7 – Aire d'une ellipse

a) Pour $x \in [0, a]$, la demi-ellipse supérieure est $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$:

$$A_{1/4} = \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

b) $x = a\sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $dx = a\cos t\,dt$, $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t \ge 0$:

— $A_{1/4} = ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = ab \cdot \frac{\pi}{4}$ (linéarisation). Aire totale : πab. Pour $a = b = R$ on retrouve πR^2.

c) Demi-axes $a = 5$ m, $b = 3$ m : $\pi \times 5 \times 3 = 15\pi \approx 47{,}1$ m². On prévoira un peu plus pour le débord.

Réponse. Aire $= \pi ab$; piscine : $15\pi \approx 47{,}1$ m².

Correction de l'exercice 8 – Volumes par tranches

a) $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$ sur $[-R, R]$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left(2R^3 - \frac{2R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

b) À la distance x du sommet, la section est un disque de rayon $\frac{Rx}{h}$ (Thalès) : $V = \int_0^h \pi \frac{R^2 x^2}{h^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi R^2 h}{3}$.

c) On repère la hauteur par x depuis le centre de la sphère (le fond est en $x = -10$) ; l'eau occupe $x \in [-10, -5]$:

— $V = \pi \int_{-10}^{-5} (100 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left(500 - \frac{1000 - 125}{3}\right) = \pi \cdot \frac{625}{3} \approx 654{,}5$ cm³, soit 0,65 L — seulement 31 % du bol ($\frac{2}{3}\pi \times 1000 \approx 2094$ cm³) alors qu'on est à mi-hauteur.

Réponse. $\frac{4}{3}\pi R^3$; $\frac{1}{3}\pi R^2 h$; bol : $\frac{625\pi}{3} \approx 654$ cm³.

Correction de l'exercice 9 – Valeur moyenne et valeur efficace

a) $\frac{1}{T}\int_0^T \sin \omega t\,\mathrm{d}t = 0$. Pour $|i|$, par symétrie sur une demi-période : $\frac{2}{T}\int_0^{T/2} I_m \sin \omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\cdot\frac{2I_m}{\omega} = \frac{2I_m}{\pi} \approx 0{,}637\,I_m$.

b) Linéarisation $\sin^2 = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}$, de moyenne $\frac{1}{2}$ sur une période :

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t\,\mathrm{d}t = \frac{I_m^2}{2}, \qquad I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

c) $\frac{4}{T}\int_0^{T/4} \frac{16 I_m^2}{T^2} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{64 I_m^2}{T^3}\cdot\frac{T^3}{192} = \frac{I_m^2}{3}$, donc $I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{3}}$.

d) $U_m = 230\sqrt{2} \approx 325$ V.

Réponse. Sinus : moyenne de $|i|$ $\frac{2I_m}{\pi}$, efficace $\frac{I_m}{\sqrt{2}}$; triangle : $\frac{I_m}{\sqrt{3}}$; $U_m \approx 325$ V.

Correction de l'exercice 10 – Travail d'une force variable

a) L'opérateur fournit $+kx$:

$$W = \int_0^{x_0} kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2} \times 200 \times 0{,}05^2 = 0{,}25 \text{ J}$$

b) $W = \int_R^{R+h} \frac{gR^2 m}{r^2}\,\mathrm{d}r = gR^2 m\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{R+h} = gR^2 m\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = \frac{mgRh}{R+h}$.

c) $\frac{1000 \times 9{,}81 \times 6{,}37 \times 10^6 \times 4 \times 10^5}{6{,}77 \times 10^6} \approx 3{,}69 \times 10^9$ J. Avec mgh : $3{,}92 \times 10^9$ J, soit 6 % de trop : le facteur $\frac{R}{R+h} \approx 0{,}94$ traduit la diminution de la pesanteur avec l'altitude.

Réponse. Ressort : 0,25 J ; gravitation : $\frac{mgRh}{R+h} \approx 3{,}69 \times 10^9$ J.

Correction de l'exercice 11 – Une densité de probabilité

a) $f \geq 0$ et $\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x = 1$.

b) Une probabilité est l'aire sous la densité :

$$P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}, \qquad P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16} - \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

c) $E(X) = \int_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$; $E(X^2) = \int_0^1 2x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$; $V(X) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) $P(X \le m) = m^2 = \frac{1}{2}$: $m = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$. On a $0{,}707 > 0{,}667$: la médiane est **plus grande** que l'espérance, car la densité charge les grandes valeurs et la distribution est étalée vers la gauche.

Réponse. $P(X \le \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$; $E(X) = \frac{2}{3}$, $V(X) = \frac{1}{18}$; médiane $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 12 – Longueur d'une chaînette

a) $f'(x) = \operatorname{sh} x$ et $\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{ch} x$ (positif) :

$$\ell = \int_{-1}^{1} \operatorname{ch} x \, \mathrm{d}x = 2 \operatorname{sh} 1 \approx 2{,}350$$

b) $f'(x) = \operatorname{sh}\frac{x}{a}$, $\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} = \operatorname{ch}\frac{x}{a}$, et $\int_{-L}^{L} \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = 2a \operatorname{sh}\frac{L}{a}$.

c) $L = 50$: $\ell = 160 \operatorname{sh}(0{,}625) \approx 160 \times 0{,}6665 \approx 106{,}6$ m, soit 6,6 m de plus que la portée. Flèche : $80(\operatorname{ch}(0{,}625) - 1) \approx 80 \times 0{,}2018 \approx 16{,}1$ m.

Réponse. $2 \operatorname{sh} 1 \approx 2{,}35$; câble $\approx 106{,}6$ m, flèche $\approx 16{,}1$ m.

Correction de l'exercice 13 – Somme de Riemann et suite récurrente

a) On réindexe $k = n + j$, $j = 1..n$: $S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1 + j/n}$, somme de Riemann de $\frac{1}{1+x}$:

$$S_n \to \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2$$

b) $T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k/n}{1 + k/n}$: limite $\int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = 1 - \ln 2 \approx 0{,}307$.

c) $\sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{(p-1)n} \frac{1}{1+j/n}$: somme de Riemann sur $[0, p-1]$ (pas $\frac{1}{n}$), limite $\int_0^{p-1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln p$. Cohérent avec $H_{pn} - H_n \approx \ln(pn) - \ln n$.

Réponse. $S_n \to \ln 2$; $T_n \to 1 - \ln 2$; $\sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} \to \ln p$.

Correction de l'exercice 14 – Aire sous une hyperbole et logarithme

a) L'aire sous la courbe d'une fonction positive est son intégrale :

$$A(a,b) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$$

b) $\ln \frac{kb}{ka} = \ln \frac{b}{a}$. Géométriquement, l'application $(x, y) \mapsto \left(kx, \frac{y}{k}\right)$ conserve l'hyperbole et les aires (elle multiplie les longueurs horizontales par k et verticales par $\frac{1}{k}$).

c) $A(a_n, a_{n+1}) = \ln q$ pour tout n, donc $A(1, a_n) = n \ln q$: l'aire transforme une progression **géométrique** en progression **arithmétique**, propriété caractéristique du logarithme.

d) $\frac{1}{x}$ décroît : avec 2 rectangles de largeur $\frac{1}{2}$,
$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{12} \approx 0{,}583 \le \ln 2 \le \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{6} \approx 0{,}833$. Avec 4 :
$\frac{1}{4}\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}635 \le \ln 2 \le \frac{1}{4}\left(1 + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7}\right) \approx 0{,}760$.

Réponse. $A(a,b) = \ln \frac{b}{a}$, invariante par $(a,b) \mapsto (ka, kb)$; $0{,}635 \le \ln 2 \le 0{,}760$ avec 4 rectangles.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : vers la formule de Stirling

a) $\ln((n+1)!) - \ln(n!) = \ln(n+1)$, d’où

$$u_n - u_{n+1} = -\ln(n+1) + \left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(n+1) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - 1 = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{n+1}{n} - 1$$

b) Avec $t = \frac{1}{2n+1}$: $\frac{1+t}{1-t} = \frac{n+1}{n}$ et $\frac{1}{2t} = n + \frac{1}{2}$. La majoration admise donne, avec $1 - t^2 = \frac{4n(n+1)}{(2n+1)^2}$:

— $\frac{t^2}{3(1-t^2)} = \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.

c) (u_n) est décroissante, et $u_n - u_{n+1}$ se **télescope** : $u_1 - u_n \leq \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{12}$. Décroissante minorée, elle converge vers λ. Alors $\ln(n!) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \lambda + o(1)$; en prenant l’exponentielle, $n! \sim \mathrm{e}^{\lambda}\sqrt{n}\, n^n \mathrm{e}^{-n}$.

d) $\sqrt{20\pi}\left(\frac{10}{\mathrm{e}}\right)^{10} \approx 3\,598\,696$, soit 0,83 % de moins que 10!. L’erreur relative est de l’ordre de $\frac{1}{12n}$, comme le laisse prévoir b).

Réponse. (u_n) décroissante minorée ; $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{\mathrm{e}})^n$; pour $n = 10$, erreur 0,83 %.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).