Plaquette 2 – Techniques de calcul de primitives

Primitives et intégrales — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formes à reconnaître (à une constante près) :

$$\int u'u^\alpha = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad \int \frac{u'}{u} = \ln|u| \qquad \int \frac{u'}{1+u^2} = \arctan u \qquad \int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u$$

— $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\arctan\frac{x-\alpha}{\beta}$; $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

— **Linéarisation** : $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}$.

— **Complexes** : $\mathrm{e}^{ax}\cos bx = \mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{(a+ib)x}$ et $\int \mathrm{e}^{(a+ib)x}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{(a+ib)x}}{a+ib}$.

— **Angle moitié** $t = \tan\frac{x}{2}$: $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

— **Symétrie** : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$.

Correction de l’exercice 1 – Reconnaître la forme

Chaque fois, on repère une fonction u **et sa dérivée** dans l’intégrande :

$$\int \frac{u'}{u} = \ln|u|, \qquad \int u'u^\alpha = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

a) $\tan x = -\frac{(\cos x)'}{\cos x}$: $[-\ln\cos x]_0^{\pi/4} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\ln 2}{2} \approx 0{,}347$.

b) $\frac{1}{x\ln x} = \frac{(\ln x)'}{\ln x}$ avec $\ln x > 0$: $[\ln(\ln x)]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

c) $u = 1+x^2$, $u' = 2x$, $\alpha = -\frac{1}{2}$: $[\sqrt{1+x^2}]_0^1 = \sqrt{2}-1 \approx 0{,}414$.

d) $u = \sin x$, $u' = \cos x$, $\alpha = 4$: $\left[\frac{\sin^5 x}{5}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{5}$.

Réponse. a) $\frac{\ln 2}{2}$ · b) $\ln 2$ · c) $\sqrt{2}-1$ · d) $\frac{1}{5}$.

Correction de l’exercice 2 – Linéariser un produit

a) $\sin^2 x\cos^2 x = \frac{\sin^2 2x}{4}$ et $\sin^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2}$ donnent

$$\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1-\cos 4x}{8}$$

— $A = \frac{1}{8}\left[x - \frac{\sin 4x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16} \approx 0{,}196$.

b) Le produit vaut $\frac{(\mathrm{e}^{2ix}-\mathrm{e}^{-2ix})^2}{-16} = \frac{\mathrm{e}^{4ix}-2+\mathrm{e}^{-4ix}}{-16} = \frac{2-2\cos 4x}{16}$: même linéarisation.

c) $\sin^2 x\cos^2 x$ est $\frac{\pi}{2}$-périodique ; sa moyenne sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est $\frac{\pi/16}{\pi/2} = \frac{1}{8}$, ce qu’on lit directement sur $\frac{1-\cos 4x}{8}$ (le cosinus est de moyenne nulle).

Réponse. $A = \frac{\pi}{16}$; valeur moyenne $\frac{1}{8}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Puissance impaire : changer de variable

a) Avec $u = \cos x$, $u' = -\sin x$:

$$\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)\sin x\,\mathrm{d}x = \left[-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\pi/2} = 0 - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

b) $\cos^3 x = (1-\sin^2 x)\cos x$; $t = \sin x$, $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$, bornes 0 et 1 :

— $\int_0^1 t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} \approx 0{,}133$.

c) La méthode exige une puissance **impaire** de sin ou de cos : on met de côté un facteur $\sin x$ (ou $\cos x$) qui devient le $\mathrm{d}t$, et le reste, en puissance paire, s'exprime avec l'autre fonction. Si les deux exposants sont pairs, il faut **linéariser** (exercice précédent).

Réponse. a) $\frac{2}{3}$ · b) $\frac{2}{15}$ · c) il faut un exposant impair, sinon on linéarise.

Correction de l'exercice 4 – Exponentielle fois cosinus

a) $\mathrm{e}^x \cos x = \mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{(1+i)x}$ et l'on intègre l'exponentielle complexe :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{(1+i)x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{(1+i)\pi} - 1}{1+i} = \frac{-\mathrm{e}^{\pi} - 1}{1+i} = -(\mathrm{e}^{\pi}+1)\frac{1-i}{2}$$

— car $\mathrm{e}^{i\pi} = -1$ et $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$. Partie réelle : $-\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2} \approx -12{,}07$.

b) Partie imaginaire du même nombre : $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2}$.

c) Notons C et S les deux intégrales. IPP ($u' = \mathrm{e}^x$) : $C = [\mathrm{e}^x\cos x]_0^{\pi} + S = -\mathrm{e}^{\pi} - 1 + S$, et $S = [\mathrm{e}^x \sin x]_0^{\pi} - C = -C$. D'où $2C = -\mathrm{e}^{\pi} - 1$: même résultat.

Réponse. $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\cos x = -\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2}$ et $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2}$.

Correction de l'exercice 5 – Pôle double

a) Coefficient du pôle double : on multiplie par x^2 et on fait $x = 0$, $b = 1$. Pôle simple -1 : on multiplie par $x+1$ et on fait $x = -1$, $c = 1$. Pour a, on regarde $x \times F(x)$ quand $x \to +\infty$: $0 = a + c$, donc $a = -1$.

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

b) Primitive sur $[1,2]$: $-\ln x - \frac{1}{x} + \ln(x+1)$. Donc

— $\left(-\ln 2 - \frac{1}{2} + \ln 3\right) - (0 - 1 + \ln 2) = \ln 3 - 2\ln 2 + \frac{1}{2} = \ln\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \approx 0{,}212$.

c) L'intégrande décroît de $\frac{1}{2}$ (en 1) à $\frac{1}{12}$ (en 2) : l'intégrale est entre 0,083 et 0,5 ; 0,21 est plausible.

Réponse. $a = -1$, $b = c = 1$; intégrale $= \frac{1}{2} + \ln\frac{3}{4} \approx 0{,}212$.

Correction de l'exercice 6 – Décomposer 1/(x³ + 1)

a) $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$, le trinôme ayant un discriminant $-3 < 0$. On cherche $\frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$:

— $a = \frac{1}{3(-1)^2} = \frac{1}{3}$ (multiplier par $x+1$ et faire $x = -1$) ;

— identification dans $1 = \frac{1}{3}(x^2 - x + 1) + (bx + c)(x+1)$: terme en x^2, $b = -\frac{1}{3}$; terme constant, $c = \frac{2}{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $-x+2 = -\frac{1}{2}(2x-1) + \frac{3}{2}$: $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{3}{2}$.

c) Donc $\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$. Sur $[0,1]$:

$$\frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{6}\big[\ln(x^2-x+1)\big]_0^1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1$$

— Le crochet du logarithme est nul ($\ln 1 - \ln 1$) ; l'arctangente va de $-\frac{\pi}{6}$ à $\frac{\pi}{6}$: $\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3}$. Total : $\frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}836$.

Réponse. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}836$.

Correction de l'exercice 7 – Changement de variable t = tan(x/2)

a) $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1-t^2\right)$ et $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}$. Puis $x = 2\arctan t$, donc $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$.

b) Bornes : $x=0 \Rightarrow t=0$, $x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=1$. Le dénominateur devient

$$2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{3+t^2}{1+t^2}$$

— d'où $\int_0^1 \frac{2\,dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}605$.

c) $\mu = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}385$, bien entre les valeurs extrêmes $\frac{1}{3}$ (en 0) et $\frac{1}{2}$ (en $\frac{\pi}{2}$).

Réponse. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; moyenne $\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}385$.

Correction de l'exercice 8 – Éliminer une racine carrée

a) $u = \sqrt{1+x}$, $x = u^2-1$, $dx = 2u\,du$; bornes 1 et 2 :

$$\int_1^2 \frac{u^2-1}{u}\,2u\,du = 2\left[\frac{u^3}{3} - u\right]_1^2 = 2\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

b) $\left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2} - 2(1+x)^{1/2}\right]_0^3 = \left(\frac{16}{3} - 4\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ ✓.

c) $u = \sqrt{x}$, $x = u^2$, $dx = 2u\,du$:

— $\int_0^1 \frac{2u}{1+u}\,du = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+u}\right)du = 2(1-\ln 2) \approx 0{,}614$.

Réponse. a) $\frac{8}{3}$ · c) $2(1-\ln 2) \approx 0{,}614$.

Correction de l'exercice 9 – Changement de variable hyperbolique

a) On dérive : $\frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Donc $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0{,}881$.

b) $x = \operatorname{sh} t$, $dx = \operatorname{ch} t\,dt$, $\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = \operatorname{ch} t$; bornes 0 et $\tau = \operatorname{argsh} 1 = \ln(1+\sqrt{2})$:

$$\int_0^\tau \operatorname{ch}^2 t\,dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2t}{4}\right]_0^\tau = \frac{\tau}{2} + \frac{\operatorname{sh}\tau\operatorname{ch}\tau}{2}$$

— avec $\operatorname{sh}\tau = 1$ et $\operatorname{ch}\tau = \sqrt{2}$: $\frac{\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})}{2} \approx 1{,}148$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) La longueur d'un arc de courbe $y = f(x)$ est $\int \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$, et ici $f'(x) = x$. On trouve 1,148, un peu plus que la corde $\sqrt{1 + \frac{1}{4}} \approx 1{,}118$: cohérent.

Réponse. a) $\ln(1 + \sqrt{2})$ · b) $\frac{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})}{2} \approx 1{,}148$.

Correction de l'exercice 10 – Reconnaître un arcsinus

On se ramène à la forme de référence

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u$$

a) $\sqrt{4 - x^2} = 2\sqrt{1 - (x/2)^2}$ et $u = \frac{x}{2}$, $u' = \frac{1}{2}$: $[\arcsin \frac{x}{2}]_0^1 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}524$.

b) $2x - x^2 = 1 - (x - 1)^2$ et $u = x - 1$: $[\arcsin(x - 1)]_{1/2}^{3/2} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

c) Comme en a) : $\arcsin \frac{x}{a}$. Contrôle : $\frac{d}{dx} \arcsin \frac{x}{a} = \frac{1/a}{\sqrt{1 - x^2/a^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Réponse. a) $\frac{\pi}{6}$ · b) $\frac{\pi}{3}$ · c) $\arcsin \frac{x}{a}$.

Correction de l'exercice 11 – Deux intégrations par parties qui bouclent

a) $u' = 1$, $v = \sin(\ln x)$, $v' = \frac{\cos(\ln x)}{x}$:

$$I = [x \sin(\ln x)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \cos(\ln x)\,dx = \mathrm{e} \sin 1 - J$$

— De même $J = [x \cos(\ln x)]_1^{\mathrm{e}} + I = \mathrm{e} \cos 1 - 1 + I$.

b) En remplaçant : $I = \mathrm{e} \sin 1 - \mathrm{e} \cos 1 + 1 - I$, donc

— $I = \frac{\mathrm{e}(\sin 1 - \cos 1) + 1}{2} \approx 0{,}909$ et $J = \frac{\mathrm{e}(\sin 1 + \cos 1) - 1}{2} \approx 1{,}378$.

c) $x = \mathrm{e}^t$, $dx = \mathrm{e}^t dt$: $I = \int_0^1 \mathrm{e}^t \sin t\,dt = \mathrm{Im} \frac{\mathrm{e}^{1+i} - 1}{1 + i}$, qui redonne la même valeur. Les deux IPP « qui bouclent » sont l'équivalent réel du calcul complexe.

Réponse. $I = \frac{\mathrm{e}(\sin 1 - \cos 1) + 1}{2} \approx 0{,}909$.

Correction de l'exercice 12 – Formule de réduction

a) $I_0 = \mathrm{e} - 1$. IPP avec $u' = 1$, $v = (\ln x)^n$, $v' = \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x}$:

$$I_n = [x(\ln x)^n]_1^{\mathrm{e}} - n \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^{n-1}\,dx = \mathrm{e} - n I_{n-1}$$

b) $I_1 = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1$; $I_2 = \mathrm{e} - 2$; $I_3 = \mathrm{e} - 3(\mathrm{e} - 2) = 6 - 2\mathrm{e} \approx 0{,}563$.

c) Sur $[1, \mathrm{e}]$, $0 \le \ln x \le 1$ donc $0 \le (\ln x)^n \le 1$: $0 \le I_n \le \mathrm{e} - 1$. Alors $n I_{n-1} = \mathrm{e} - I_n$ est borné, donc $I_{n-1} \to 0$ et $I_n \to 0$; par suite $n I_{n-1} = \mathrm{e} - I_n \to \mathrm{e}$, soit $I_{n-1} \sim \frac{\mathrm{e}}{n}$, et donc $I_n \sim \frac{\mathrm{e}}{n+1} \sim \frac{\mathrm{e}}{n}$.

Réponse. $I_n = \mathrm{e} - n I_{n-1}$; $I_3 = 6 - 2\mathrm{e}$; $I_n \sim \frac{\mathrm{e}}{n}$.

Correction de l'exercice 13 – Valeur absolue et partie entière

On utilise la **relation de Chasles** pour se ramener à des intervalles où l'intégrande a une expression simple.

a) $x^2 - 1 \le 0$ sur $[-1, 1]$ et ≥ 0 sur $[1, 2]$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}(x^2-1)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}+\left(\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

b) Sur $[k,k+1[$, $\lfloor x\rfloor=k$ (les valeurs aux points entiers ne changent pas l'intégrale) :

— $\int_0^1 0+\int_1^2 x\,\mathrm{d}x+\int_2^3 2x\,\mathrm{d}x=0+\frac{3}{2}+5=\frac{13}{2}$.

c) $\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}k\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2}$: c'est l'aire d'un escalier.

Réponse. a) $\frac{8}{3}$ · b) $\frac{13}{2}$ · c) $\frac{n(n-1)}{2}$.

Correction de l'exercice 14 – Primitive de 1/cos

a) $t=\sin x$, $\mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$; bornes 0 et $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{1}{2}\Big[\ln\frac{1+t}{1-t}\Big]_0^{\sqrt{2}/2}=\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

— avec la décomposition $\frac{1}{1-t^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)$.

b) $\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{(2+\sqrt{2})^2}{4-2}=\frac{6+4\sqrt{2}}{2}=3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$. D'où $\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})^2=\ln(1+\sqrt{2})\approx 0{,}881$.

c) Dérivée : $\frac{\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\cos x}$ ✓. En $\frac{\pi}{4}$: $\ln\tan\frac{3\pi}{8}=\ln(1+\sqrt{2})$.

Réponse. $\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\ln(1+\sqrt{2})\approx 0{,}881$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : astuces de symétrie

Principe : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$ (changement $x=a+b-u$).

a) $x=\frac{\pi}{2}-u$ échange sin et cos : $I=J$. Et $I+J=\int_0^{\pi/2}1\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, donc $I=\frac{\pi}{4}$.

b) $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$, donc $1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1+\tan x+1-\tan x}{1+\tan x}=\frac{2}{1+\tan x}$.

c) Le changement de variable donne

$$K=\int_0^{\pi/4}\ln\frac{2}{1+\tan u}\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{4}\ln 2-K$$

— donc $K=\frac{\pi}{8}\ln 2\approx 0{,}272$.

d) On a exploité une **symétrie** de l'intervalle qui transforme l'intégrale en elle-même (ou en une intégrale « complémentaire ») ; on obtient une **équation** en l'inconnue, sans jamais chercher de primitive.

Réponse. $I=\frac{\pi}{4}$; $K=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).