Plaquette 4 – Fonctions définies par une intégrale et suites d'intégrales

Primitives et intégrales — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour une fonction $F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$: on introduit une **primitive** Φ de f, on écrit $F=\Phi\circ v-\Phi\circ u$, et l'on dérive ; les limites s'obtiennent en **encadrant** l'intégrande sur l'intervalle d'intégration. Pour une suite $I_n=\int f_n$: relation de récurrence par **parties** ou par une **somme** I_n+I_{n+k}, monotonie en comparant les intégrandes, limite par encadrement, **équivalent** en combinant récurrence et monotonie.

Exercice 1 – Une intégrale entre x et 2x

Soit $F(x)=\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$; calculer $F'(x)$.

b) Étudier la parité de F et ses variations sur $\mathbb{R}_+$.

c) Montrer que $0\leq F(x)\leq x\mathrm{e}^{-x^2}$ pour $x\geq 0$ et en déduire la limite en $+\infty$.

Exercice 2 – Intégrale de 1/ln t entre x et x²

Pour $x>1$, soit $G(x)=\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

a) Calculer $G'(x)$ et en déduire le sens de variation de G sur $]1,+\infty[$.

b) En écrivant $\frac{1}{\ln t}=t\cdot\frac{1}{t\ln t}$, montrer que $x\ln 2\leq G(x)\leq x^2\ln 2$.

c) En déduire $\lim_{x\to 1^+}G(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}G(x)$.

d) Vérifier b) pour $x=2$ ($G(2)\approx 1{,}922$).

Exercice 3 – Comportement asymptotique par parties

Soit $\Phi(x)=\int_1^x\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $x\geq 1$.

a) Par parties, montrer que $\Phi(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}-\mathrm{e}+\int_1^x\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que $\int_1^x\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\,\mathrm{d}t=o\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)$ (couper l'intégrale en $\frac{x}{2}$).

c) En déduire $\Phi(x)\sim\frac{\mathrm{e}^x}{x}$ en $+\infty$.

d) Numériquement : $\Phi(10)\approx 2490$ et $\frac{\mathrm{e}^{10}}{10}\approx 2203$. Commenter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

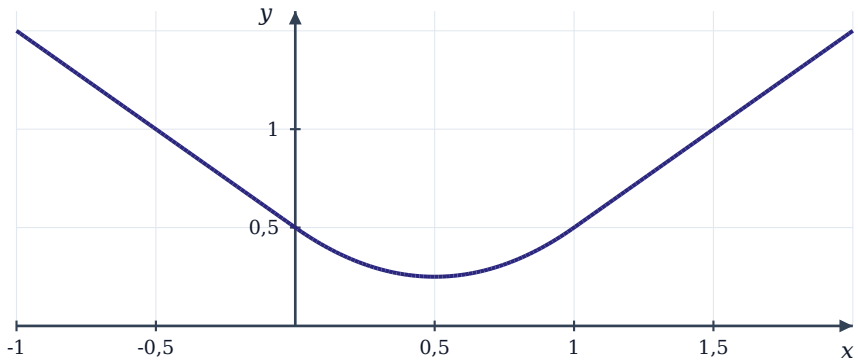
Exercice 4 – Moyenne des distances à un point

Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = \int_0^1 |t - x|\,\mathrm{d}t$.

a) Calculer $f(x)$ pour $x \le 0$, pour $x \ge 1$, puis pour $0 \le x \le 1$ (couper en x).

b) Vérifier que f est continue et même dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer le minimum de f et interpréter : $f(x)$ est la distance moyenne d'un point uniformément choisi dans $[0, 1]$ à x.



La fonction f : parabole sur [0, 1], droites ailleurs

Exercice 5 – Équations intégrales

Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

a) $f(x) = 1 + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout x ;

b) $f(x) = 1 + 2\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout x ;

c) $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x^2 + \sin x$ pour tout x.

Justifier soigneusement pourquoi f est dérivable.

Exercice 6 – Équivalent d'une suite d'intégrales

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

a) Calculer I_0 et $I_n + I_{n+1}$.

b) Montrer que (I_n) est décroissante et tend vers 0.

c) Montrer que $\frac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{2n}$ pour $n \ge 1$ et en déduire $I_n \sim \frac{1}{2n}$.

d) Vérifier avec $I_{10} \approx 0{,}04751$ et $I_{100} \approx 0{,}004975$.

Exercice 7 – Équivalent des intégrales de Wallis

Soit $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x$, avec $nW_n = (n-1)W_{n-2}$ pour $n \ge 2$ (plaquette 1).

a) Montrer que (W_n) est décroissante et strictement positive.

b) Montrer que $(n+1)W_{n+1}W_n$ est constante, égale à $\frac{\pi}{2}$.

c) Montrer que $W_{n+1} \sim W_n$ (encadrer $\frac{W_{n+1}}{W_n}$ avec $\frac{W_{n+2}}{W_n}$).

d) En déduire $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Vérifier avec $W_{10} \approx 0{,}3866$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Une récurrence numériquement instable

Soit $I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

a) Calculer I_0 et montrer que $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{\mathrm{e}}$ pour $n \geq 1$.

b) Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

c) On calcule $I_1, \ldots, I_{20}$ par la récurrence à partir de $I_0 \approx 0{,}632120558828557$ (15 chiffres). On obtient $I_{20} \approx -82$. Expliquer.

d) Proposer un calcul stable (récurrence à rebours à partir d'une valeur grossière de I_N).

Exercice 9 – Primitive d'une fonction périodique

Soit f continue et T-périodique, et $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $F(x+T) - F(x) = \int_0^T f$ pour tout x.

b) En déduire : F est T-périodique si et seulement si $\int_0^T f = 0$.

c) Application : pour quelles valeurs de a la fonction $x \mapsto \int_0^x (\cos^2 t - a)\,\mathrm{d}t$ est-elle périodique ?

d) Dans le cas général, montrer que $F(x) = \mu x + G(x)$ avec $\mu = \frac{1}{T}\int_0^T f$ et G périodique.

Exercice 10 – Le logarithme défini par une intégrale

On définit, pour $x > 0$, $L(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$ (sans rien supposer sur ln).

a) Montrer que L est dérivable, strictement croissante, et $L(1) = 0$.

b) Pour $y > 0$ fixé, par le changement $t = yu$, montrer que $L(xy) = L(x) + L(y)$.

c) Montrer que $L(x) \leq x - 1$ (comparer $\frac{1}{t}$ à 1).

d) Montrer que $L(2^n) = nL(2)$ et en déduire que L n'est pas majorée.

Exercice 11 – Arctangente et symétrie t ↦ 1/t

On rappelle $\arctan x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

a) Pour $x > 0$, par le changement $t = \frac{1}{u}$, montrer que $\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_{1/x}^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.

b) En déduire $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$.

c) Retrouver ce résultat en dérivant $x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

d) Que vaut $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ pour $x < 0$?

Exercice 12 – Intégrer deux fois

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = \int_0^x (x-t) f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Écrire $F(x) = x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$ et montrer que F est de classe C^2 avec $F'' = f$, $F(0) = F'(0) = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire l'unique solution de $y'' = f$, $y(0) = y'(0) = 0$.

c) Application : un mobile part du repos avec l'accélération $a(t) = \sin t$. Donner sa position $x(t)$ par la formule, puis vérifier.

Exercice 13 – Moyenne à l'infini

Soit f continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f(x) \to \ell$ quand $x \to +\infty$.

a) Montrer que $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \to \ell$ (fixer ε, choisir A tel que $|f - \ell| \le \varepsilon$ sur $[A, +\infty[$, puis couper l'intégrale en A).

b) Application : limite de $\frac{1}{x}\int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t$. Valeur pour $x = 100$: 1,5147. Commenter.

c) Montrer que la réciproque est fausse avec $f(t) = \cos t$.

Exercice 14 – Une intégrale qui a une limite finie

Soit $H(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$ pour $x \ge 0$.

a) Montrer que H est croissante.

b) Montrer que $H(x) \le 1 + \frac{1}{2}$ pour tout $x \ge 1$ (majorer l'intégrande par $\frac{1}{t^3}$ sur $[1, x]$).

c) En déduire que H admet une limite finie ℓ en $+\infty$ et que $\ell \le \frac{3}{2}$.

d) On admet $\ell = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \approx 1{,}2092$. Montrer que $0 \le \ell - H(x) \le \frac{1}{2x^2}$ et en déduire x tel que $H(x)$ approche ℓ à 10^{-4} près.

Exercice 15 – Synthèse : la fonction sinus intégral

Soit $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, où l'intégrande est prolongée par 1 en 0.

a) Justifier que l'intégrande est continue et que Si est dérivable ; calculer Si′.

b) Étudier les variations de Si sur $\mathbb{R}_+$: où sont ses maxima et minima locaux ?

c) Montrer que $\pi - \frac{\pi^3}{18} \le \mathrm{Si}(\pi) \le \pi$ (utiliser $t - \frac{t^3}{6} \le \sin t \le t$ pour $t \ge 0$).

d) Soit $a_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que (a_k) décroît et tend vers 0 (changement $t = u + \pi$). On admet que $\mathrm{Si}(x) \to \frac{\pi}{2}$: interpréter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).